TD 4 - Actions de groupes

Par défaut, on considère un groupe $(G, *)$, dont on note e l'unité.

† *Généralités*

Exercice 1. 1. Montrer que l'on définit une action de groupe de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en considérant

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (Z, X) & \mapsto & Z + X. \end{array}$$

2. Cette action est-elle transitive ?
3. Dessiner l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quels sont les éléments de $\mathbb{R}^2$ qui possède la même orbite ?

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ agit sur $\Bbbk^n$ par multiplication à gauche.
2. Montrer que les orbites sous cette action sont $\{0\}$ et $\Bbbk^n \setminus \{0\}$.
3. Déterminer le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0) \in \Bbbk^n$ sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.
4. On pose $n := 2$. Soit
$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \; | b \neq 0 \right\}.$$
Montrer que $\mathscr{B}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$, et montrer que l'application $\mathrm{GL}_2(\Bbbk) \to \Bbbk^2$, envoyant une matrice sur sa première colonne, induit une bijection entre $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)/\mathscr{B}$ et $\Bbbk^2$.

Exercice 3. Soit X un ensemble sur lequel G agit. Soient $x, y \in X$ deux éléments appartenant à la même orbite sous l'action de G. Montrer que $\mathrm{Stab}_G(x)$ et $\mathrm{Stab}_G(y)$ sont conjugués dans G.

Exercice 4. (Action par translation sur un quotient)
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Rappeler la définition de l'ensemble quotient G/H. Cet ensemble est-il un groupe ?
2. Montrer que la formule $g' \star (gH) = (g'g)H$ définit une action du groupe G sur l'ensemble G/H (*on montrera en particulier que $\star$ est bien définie et ne dépend d'aucun choix*).
3. Montrer que cette action est transitive.
4. Étant donné $g \in G$, déterminer le stabilisateur de l'élément $gH \in G/H$ sous cette action.
5. On suppose désormais que H est d'indice fini $n \geqslant 1$ dans G
   (a) Montrer que l'action $\star$ induit un morphismes de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-groupe d'indice fini de G.

† *Groupes finis*

Exercice 5. (Lemme de Cauchy)
Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G. On considère l'ensemble

$$X := \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \ldots g_p = e\}$$

1. Montrer que X est de cardinal $|G|^{p-1}$.
2. Définir une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X.
3. Soit $x := (g_1, \ldots, g_p) \in X$, quels sont les cardinaux possibles de l'orbite de x sous l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Montrer qu'il existe au moins deux éléments $x_1, x_2 \in X$ dont les stabilisateurs sous l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont égaux à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
5. En déduire qu'il existe un élément $g \in G$ d'ordre p.

Exercice 6. Soit G un groupe d'ordre 15 agissant sur un ensemble X de cardinal 7. Montrer qu'il existe au moins un élément de X fixé par G.

Exercice 7. Soit G un groupe d'ordre $143 = 11 \times 13$ agissant sur un ensemble X de cardinal 108. Montrer qu'il existe au moins un élément de X fixé par G.

Groupes diédraux

Exercice 8. On rappelle que les isométries du plan complexe $\mathbb{C}$ sont les applications de la forme $r_\zeta : z \mapsto \zeta z$, et les applications de la forme $s_\zeta : z \mapsto \zeta \overline{z}$ (dans les deux cas, $|\zeta| = 1$). Les applications de la forme r_ζ sont appelées *rotations*, celles de la forme s_ζ sont appelées *symétries*.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$ forme un groupe pour la composition des applications.
2. Montrer que l'ordre de r_ζ dans $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$ est égal à l'ordre de ζ dans $\mathbb{C}^\times$.
3. Montrer que l'ordre de s_ζ dans $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$ est égal à 2.
4. Montrer que les rotations forment un sous-groupe de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que le produit de deux symétries est égal soit à une rotation, soit à l'identité. En déduire que les rotations forment un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$.
6. En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, calculer les matrices associées aux éléments de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C})$.

Exercice 9. On considère le polygone régulier P_n du plan complexe $\mathbb{C}$ dont les sommets sont donnés par l'ensemble $S := \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \,|\, 0 \leq k \leq n-1\}$. Dans cet exercice, on s'intéresse au *groupe diédral* D_n. Il s'agit du groupe des isométries du plan qui préserve P_n.

1. Montrer qu'il existe une action de D_n sur S. En déduire qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : D_n \to \mathfrak{S}_n$.
2. Soit $s \in S$, montrer qu'il existe $g \in D_n$ tel que $g.1 = s$. En déduire que l'action de D_n sur S est transitive.
3. Soit $g \in \bigcap_{s \in S} \mathrm{Stab}_{D_n}(s)$. Déterminer $\{g.1, g.e^{i\frac{2\pi}{n}}, g.e^{-i\frac{2\pi}{n}}\}$. En déduire que $g = \mathrm{Id}$ et que l'action est fidèle.
4. Déterminer $\mathrm{Stab}_{D_n}(1)$ et en déduire $|D_n|$.
5. On pose $\rho = r_{e^{i\frac{2\pi}{n}}}$. Montrer que $\langle \rho \rangle$ est un sous-groupe distingué de D_n.
6. Montrer que
$$D_n = \{\rho^l, \rho^l \circ s_1 \mid l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}.$$

† *Cas particulier du groupe* $\mathfrak{S}_4$

Exercice 10. Soit k un corps. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ agit sur $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ en permutant les variables :

$$\sigma.P(X, Y, Z, T) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)})$$

1. Quel est le stabilisateur de $P = X_1X_2 + X_3X_4$ sous cette action ?
2. Considérons le polynôme de Vandermonde $P_v := \prod_{i<j}(X_i - X_j)$. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\sigma.P_v = \pm P_v$. En déduire que $\sigma.P_v = \varepsilon(\sigma)P_v$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.