TD 3 - Groupe symétrique, premières actions de groupes

† *Groupe symétrique*

Exercice 1. Calculer les produits de permutations suivants.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $(1\ 4\ 3\ 2) \circ (1\ 3\ 2)$.
4. $(2\ 5\ 4) \circ (1\ 4\ 2\ 3) \circ (2\ 4)$.
5. $(1\ 9\ 7\ 4) \circ (4\ 3\ 8\ 2) \circ (4\ 5\ 9\ 7\ 2)$.

Exercice 2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit le *support* de σ comme l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(i) \neq i\}$. Déterminer le support, l'ordre et la signature des permutations suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
3. $(1\ 5\ 4\ 2) \circ (3\ 5\ 4)$.
4. $(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 4) \circ (2\ 3\ 4) \circ (1\ 3\ 4)$.

Exercice 3. Déterminer l'ordre dans $\mathfrak{S}_8$ des éléments suivants :

$$\begin{cases} (1\ 2) \circ (3\ 4), \\ (5\ 7\ 3) \circ (2\ 3\ 8), \end{cases} \qquad \begin{cases} (1\ 2\ 3\ 4) \circ (5\ 6\ 7) \circ (8\ 2), \\ (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 3) \circ (3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \circ (1\ 2). \end{cases}$$

Exercice 4 (Cardinal)**.**

1. Soit $n \geqslant 2$. On pose $H := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$. Montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
2. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\sigma H = \sigma' H$ si et seulement si $\sigma(n) = \sigma'(n)$. En déduire que $|\mathfrak{S}_n / H| = n$.
3. Montrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Exercice 5 (Générateurs)**.** On rappelle que les transpositions engendrent le groupe symétrique. On rappelle également la formule $\sigma(i_1\ \cdots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \cdots\ \sigma(i_k))$.

1. Montrer que l'ensemble $E := \{(1\ 2), \ldots, (1\ n)\}$ engendre toutes les transpositions. En déduire que E engendre $\mathfrak{S}_n$.
2. En déduire que l'ensemble $\{(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)\}$ des *transpositions consécutives* engendre $\mathfrak{S}_n$.
3. En déduire que l'ensemble $\{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$.

† *Actions de groupes*

Exercice 6. Soient $\mathbb{k}$ un corps, et soit V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que la multiplication scalaire de $\mathbb{k}$ sur V induit une action de groupe de $\mathbb{k}^*$ sur V. Quels sont les orbites de cette action ?

Exercice 7 (Équivalence des matrices)**.** Soient $\mathbb{k}$ un corps, et $n, m \geqslant 1$ deux entiers.

1. Rappeler la loi de groupe définie sur le produit direct $\mathrm{GL}_m(\Bbbk) \times \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. On pose $G := \mathrm{GL}_m(\Bbbk) \times \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ dans la suite.
2. Montrer que l'on définit une action de groupe de G sur $\mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk)$ en posant

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & G \times \mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk) \\ & ((P,Q),A) & \longmapsto & (P,Q) \cdot A := PAQ^{-1}. \end{array}$$

3. Montrer que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk)$ sont dans la même orbite sous l'action de G si et seulement si elles représentent dans des bases différentes la même application linéaire $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$. On dit alors que A et A' sont *équivalentes*.
4. Montrer que deux matrices équivalentes ont le même rang.
5. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk)$ est équivalente à une unique matrice de la forme

$$I_{m,n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $r = \mathrm{rang}(A)$. En déduire que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Exercice 8 (Similitude des matrices)**.** Soient $\Bbbk$ un corps, et soit $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que l'on définit une action de groupe de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sur $\mathcal{M}_n(\Bbbk)$ en posant

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \times \mathcal{M}_n(\Bbbk) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\Bbbk) \\ & (P,A) & \longmapsto & P \cdot A := PAP^{-1}. \end{array}$$

2. Montrer que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\Bbbk)$ sont dans la même orbite sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\Bbbk^n$ dans des bases différentes de $\Bbbk^n$. On dit alors que A et A' sont *semblables*.
3. Montrer que deux matrices semblables sont toujours équivalentes au sens de l'exercice 7.
4. Montrer que l'action α se restreint en une action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sur l'ensemble $\mathcal{D}_n(\Bbbk)$ des matrices diagonalisables sur $\Bbbk$. Montrer que deux matrices $A, A' \in \mathcal{D}_n(\Bbbk)$ sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 9 (Demi-plan de Poincaré)**.** On considère $G := \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2 à déterminant strictement positif. On pose

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im\mathrm{m}(z) > 0\}.$$

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a $cz + d \neq 0$. Montrer également que $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$.
2. Montrer que l'on définit une action de groupe de G sur $\mathbb{H}$ en posant

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,\ z \in \mathbb{H}, \quad M \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

3. Soit $z \in \mathbb{H}$, montrer qu'il existe $M \in G$ telle que $M \cdot i = z$. En déduire que l'action ci-dessus est transitive.
4. Soient $M \in G$ et soit $z \in \mathbb{H}$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda M \in G$ et $\lambda M \cdot z = M \cdot z$.