TD 2 - Morphismes, sous-groupes distingués et groupes quotients

Par défaut, on considère un groupe $(G, *)$, dont on note e l'unité.

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont des morphismes de groupes. Lorsque cela a du sens, étudier leur noyau et leur image.

1. $\phi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R}^\times, \times)$ définie par $\phi(x) := 3^x$.
2. $\psi : (\mathbb{R}^\times, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ définie par $\psi(x) := \ln(|x|)$.
3. Pour $n \geq 2$, l'application déterminant $\det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \cdot) \to (\mathbb{C}^\times, \times)$.
4. L'application $\tau : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$ définie par $\tau(X) := X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mu : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \times)$ définie par $\mu(k) := \exp(\frac{2ik\pi}{n})$.

Exercice 2.

1. On se donne A un groupe abélien et un morphisme de groupe $\phi : G \to A$. Montrer que pour tout $g, h \in G$, on a $\phi(ghg^{-1}) = \phi(h)$.
2. Soit $\phi : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes. Montrer que pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $\phi(\tau)^2 = 1$.
3. Expliquer pourquoi les transpositions sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ (*indication : on utilisera l'exercice 9 de la feuille 1*).
4. Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^\times$ (*indication : on rappelle que tout élement de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions - voir exercice 10 de la feuille 1*).

Exercice 3. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4. Soit $g \in G$. On note α_g l'application

$$\begin{array}{rccl} \alpha_g : & G & \to & G \\ & h & \mapsto & \alpha_g(h) := ghg^{-1}. \end{array}$$

1. Montrer que α_g est un automorphisme de G. Il s'agit de l'*automorphisme intérieur* associé à g.
2. Montrer que l'ensemble des automorphismes intérieurs, $\mathrm{Int}(G) := \{\alpha_g \,|\, g \in G\}$, est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
3. Montrer que l'application $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(G)$ définie par $\alpha(g) := \alpha_g$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 5.

1. Montrer qu'un morphisme de groupes $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ est caractérisé par l'image d'un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. En déduire qu'il existe un isomorphisme entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$.

Exercice 6. Soit H un sous-groupe de G.

1. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (a) H est un sous-groupe distingué de G.
   (b) H est stable par tout automorphisme intérieur de G.
   (c) Il existe un groupe K et un morphisme de groupes $\phi : G \to K$ tels que $\mathrm{Ker}(\phi) = H$.
   (d) Pour tout $g \in G$, on a $gH = Hg$.

2. En déduire que si H est un sous-groupe d'indice 2 dans G alors $H \lhd G$.

Exercice 7. Démontrer l'existence des isomorphismes suivants.

1. Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{-1, 1\}$.
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^*$ où $\mathbb{k}$ désigne un corps.
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \simeq \{-1, 1\}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$ où μ_n désigne l'ensemble des racines n^{ieme} de l'unité muni de la multiplication.

Exercice 8. On pose $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\times, \times)$.
2. Vérifier que l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ définie par $\phi(x) := e^{2i\pi x}$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau et son image.
3. En déduire qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

Exercice 9 (« **Deuxième théorème d'isomorphisme** »)**.** Soient H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
2. On suppose à présent que K est distingué dans G.
   (a) Expliquer pourquoi HK est un sous-groupe de G.
   (b) Vérifier que $H \cap K \lhd H$ et $K \lhd HK$.
   (c) Introduire un morphisme de groupes de H vers HK/K et en déduire un isomorphisme
   $$H/(H \cap K) \simeq HK/K.$$

Exercice 10 (« **Troisième théorème d'isomorphisme** »)**.**
Soient H et K deux sous-groupes distingués de G tels que $K \subset H$.

1. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\phi : G/K \to G/H$. (*indication : on utilisera le théorème de factorisation canonique*).
2. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$.
3. En déduire qu'il existe un isomorphisme $(G/K)/(H/K) \simeq G/H$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme $[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n$.

1. Montrer qu'un sous-groupe H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par un élément $[d]_n$ tel que d divise n. On note alors $H = (d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$.
2. Soit d un diviseur de n. Montrer que $(d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$ est l'unique sous-groupe d'ordre $\frac{n}{d}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'un morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est uniquement déterminé par $\varphi([1]_n) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et que $n.\varphi([1]_n) = [0]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
4. Réciproquement, montrer que, si $[l]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est tel que $n.[l]_m = [0]_n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, alors poser $\varphi([k]_n) := [k.l]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ définit un morphisme de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
5. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes, on note $[l]_m := \varphi([1]_n)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi = ((l \wedge m)\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}$ où $l \wedge m$ est le PGCD de l et m. En déduire que $|\,\mathrm{Ker}\,\varphi| = \frac{(l\wedge m)n}{m}$. En déduire enfin que $\mathrm{Ker}\,\varphi = (\frac{m}{l\wedge m}\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}$.