TD 1 - Rappels sur les groupes et les sous-groupes

Par défaut, on considère un groupe $(G, *)$, dont on note e l'unité.

† *Premiers exemples*

Exercice 1. Déterminer toutes les lois de composition internes $*$ sur un ensemble X de cardinal 2 telles que $(X, *)$ soit un groupe. Même question pour un ensemble X de cardinal 3. Même question pour un ensemble X de cardinal 4.

Exercice 2.

1. Soient $x, y \in G$. Montrer que x et y commutent si et seulement si $xyx^{-1}y^{-1} = e$.
2. On suppose que pour tout $x \in G$, on a $x^2 = e$. Montrer que G est abélien (*indication : on pourra remarquer que $x^2 = e$ entraîne $x = x^{-1}$*).
3. Donner un exemple de groupe respectant la condition de la question 2.
4. Donner un exemple de groupe abélien qui ne respecte pas la condition de la question 2.

† *Sous-groupes*

Exercice 3 (Sous-groupes). On rappelle qu'un *sous-groupe* H de G est la donnée d'un sous-ensemble $H \subset G$ non vide et tel que pour tout $x, y \in H$, on a $x * y \in H$ et $x^{-1} \in H$ (la restriction de $*$ à H fait alors de $(H, *)$ un groupe).

1. Soit $H \subset G$ un sous-ensemble. Montrer que H forme un sous-groupe de G si et seulement si on a à la fois $e \in H$ et pour tout $x, y \in H$, $x * y^{-1} \in H$.
2. Soient $H, K \subset G$ deux sous-groupes. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
3. Soient $H, K \subset G$ deux sous-groupes. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 (Classes à gauche). Soit H un sous-groupe de G.

1. Montrer que la relation $\equiv_H$ sur G définie par
$$\forall x, y \in G,\ x \equiv_H y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$
est une relation d'équivalence sur G. On appelle cette relation l'*égalité modulo H à gauche.*
2. Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de x modulo H à gauche est donnée par l'ensemble $xH := \{x * h \mid h \in H\}$. On appelle xH la *classe à gauche* de x modulo H.
3. Bonus : montrer que la relation ${}_H\!\equiv$ donnée par $x\, {}_H\!\equiv y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$ est aussi une relation d'équivalence sur G. Quelles sont ses classes d'équivalence ? (on les appelle les classes à droite).

Exercice 5. Dans cet exercice, on fixe un corps $\Bbbk$.

1. Rappeler pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ forme un groupe pour le produit des matrices ?
2. On considère l'ensemble suivant
$$\mathscr{A} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Bbbk) \mid \lambda \neq 0 \right\}.$$
Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$.

3. Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$. Déterminer la classe à gauche de M. En déduire qu'une matrice $M' \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ est équivalente à M modulo $\mathscr{A}$ à gauche si et seulement si les premières colonnes de M et de M' sont colinéaires et les secondes colonnes de M et M' sont égales.
4. Soit $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$. Montrer que $a = 0$ entraîne $c \neq 0$, ensuite montrer que
   a) Si $a \neq 0$, alors il existe une unique matrice de la forme $M' = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ telle que $M \equiv_A M'$.
   b) Si $a = 0$, alors il existe une unique matrice de la forme $M' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & z \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ telle que $M \equiv_A M'$.
5. On considère l'ensemble suivant
$$\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \neq 0 \right\}.$$
   Montrer que $\mathscr{B}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$. Déterminer la classe à gauche d'une matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$. En déduire qu'une matrice $M' \in \mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ est équivalente à M modulo $\mathscr{B}$ à gauche si et seulement si leurs premières colonnes sont égales. Décrire des représentants des classes à gauche dans $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ modulo $\mathscr{B}$.

† *Permutations*

Exercice 6. Calculer les compositions suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, puis calculer leur signature :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 9 & 8 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $(1\ 5\ 4\ 2) \circ (3\ 4\ 5)$ dans $\mathfrak{S}_5$.
4. $(1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 4) \circ (1\ 3\ 4) \circ (2\ 3\ 4)$ dans $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 8.
1. Dans $\mathfrak{S}_3$, on considère l'ensemble $K := \{\mathrm{Id}, (1\ 2), (1\ 3\ 2)\}$. Montrer que K n'est pas un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$.
2. Dans $\mathfrak{S}_3$, on considère l'ensemble $H := \{\mathrm{Id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$.
3. Dans $\mathfrak{S}_3$, on considère l'ensemble $S := \{\mathrm{Id}, (1\ 2)\}$. Montrer que S est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$.
4. Calculer l'ensemble des classes à gauche (resp. à droite) de G modulo S.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que $\sigma \circ (1\ 2\ \cdots\ n) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n))$.
2. Plus généralement, si $(i_1\ \cdots\ i_k) \in \mathfrak{S}_n$ est un k-cycle (avec $k \leqslant n$), alors on a
$$\sigma \circ (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k)).$$

Exercice 10. On se propose de montrer que pour tout entier n, tout élément non trivial de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit d'au plus n transpositions. On procède par récurrence sur n.

1. Montrer le résultat pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (a) Si $\sigma(n) = n$, montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ s'écrit comme un produit d'au plus $n-1$ transpositions.
   (b) Si $\sigma(n) \neq n$, on considère la transposition $\tau := (n\ \sigma(n))$. Montrer que $\sigma' := \tau \circ \sigma$ est telle que $\sigma(n') = n'$.
   (c) Conclure que σ s'écrit comme un produit d'au plus n transpositions.