

**Courbes paramétrées:
DM à rendre pour le mardi 22 Avril 2025**

Exercice 1. Soit la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos 3t. \end{cases}$$

1. Étudier la périodicité de γ .
2. Montrer que la courbe admet les axes (Ox) et (Oy) comme axes de symétrie.
3. Dédire des questions précédentes qu'on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Dresser les tableaux de variations de x et y .
5. Déterminer les éventuels points singuliers de la courbe sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
6. Est-ce qu'il y a des points de rebroussement ? Si oui, de quelle espèce ?
7. Déterminer les tangentes à la courbe en $\gamma(0)$, $\gamma(\frac{\pi}{3})$ et $\gamma(\frac{\pi}{2})$.
8. Dans cette question, on cherche à déterminer la concavité de la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Vérifier que $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} \cos t \sin^2 t & 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t \\ -\sin 3t & -3 \cos t \end{vmatrix}$.

On note $\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos t \sin^2 t & 2 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t \\ -\sin 3t & -3 \cos 3t \end{vmatrix}$.

- (b) Exprimer $\cos 3t$ et $\sin 3t$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
 - (c) En déduire une expression de $\Delta(t)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
 - (d) En déduire la concavité de la courbe sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.
9. Tracer la courbe en utilisant les questions précédentes ; on placera les points $\gamma(0)$, $\gamma(\frac{\pi}{3})$ et $\gamma(\frac{\pi}{2})$, on utilisera les symétries pour tracer la totalité de la courbe.