Université de Picardie Jules Verne 2022-2023
UFR des Sciences L1

Courbes paramétrées:
Examen première session

Exercice 1. Soit la courbe $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ d'équation

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t = 2\cos^2 t + 2\cos t - 1, \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin t(1 - \cos t). \end{cases}$$

1. Trouver les points d'intersection de la courbe avec l'axe Ox.
2. Montrer que la courbe admet l'axe Ox comme axe de symétrie et en déduire qu'on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
3. Calculer les expressions de $x'(t)$, $x''(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$.
4. Calculer les points singuliers de la courbe.
5. Est-ce qu'il y a des points de rebroussement ? Si oui, de quelle espèce ?
6. Donner les tableaux de variations de x et y sur $[0, \pi]$. [Indication : on pourra utiliser les formules trigonométriques pour $\sin 2t$ et $\cos 2t$.]
7. Déterminer la tangente à la courbe en $\gamma(\frac{2\pi}{3})$.
8. Montrer que dét $\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = 4(1 - \cos t)$. Donner la concavité de la courbe sur $]0, \pi[$.
9. Tracer la courbe.
10. Calculer la longueur de la courbe pour le paramètre allant de 0 à $\frac{2\pi}{3}$ et du $\frac{2\pi}{3}$ à π. [Indication : Utiliser les formules trigonométriques en constatant que $\cos 3t = \cos(2t + t)$].
11. En déduire la longueur de la courbe γ.