Université de Picardie Jules Verne 2022-2023
UFR des Sciences L1

Courbes paramétrées:
Examen seconde session

Exercice 1. Soit la courbe $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ d'équation

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(|\sin t|) \\ y(t) = \sin t \cos t. \end{cases}$$

1. Montrer que la courbe possède l'axe (Ox) comme axe de symétrie.
2. Montrer qu'on peut réduire l'étude de la courbe à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer x' et y'.
4. Déterminer les éventuels points singuliers de la courbe. Y a-t-il des points de rebroussement ? Si oui, de quelle espèce ?
5. Déterminer une équation de la tangente en $(\frac{\pi}{2})$ et en $\gamma(\frac{\pi}{4})$.
6. Donner les tableaux de variations de x et y sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
7. (a) Montrer que pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin 2t + \frac{\cos t}{\sin t} & \cos 2t \\ -2\cos 2t - \frac{1}{\sin^2 t} & -2\sin 2t \end{vmatrix}$.
   (b) En déduire la concavité de la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
8. Montrer que la courbe admet une asymptote quand $t \to 0$ qu'on déterminera.
9. Tracer la courbe : on placera les poins $\gamma(\frac{\pi}{2}), \gamma(\frac{\pi}{4})$ ainsi que leurs tangentes et on tracera la courbe en utilisant les questions précédentes.