Feuille de TD 2 : premiers exemples

Exercice 1. 1. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite D passant par $A(1,-2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=(1,2)$.

2. Soit D la droite d'équation paramétrique:

$$\begin{cases} x(t) = 1+3t \\ y(t) = -1+t \end{cases}$$

Donner une équation cartésienne de cette droite.

3. Soit D la droite d'équation cartésienne $2x+3y+1=0$. Donner une équation paramétrique de cette droite.

Exercice 2. Soit $I =]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On note $\Gamma := \{(t, f(t)) \,|\, t \in I\}$ le graphe de la fonction f.

1. Montrer qu'il existe $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ tel que Γ est l'**image** de γ.

On a montré que le graphe d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ est une courbe paramétrée du plan.

2. Montrer que si f est de classe C^k, γ est de classe C^k.
3. Donner une paramétrisation de la parabole d'équation $y = x^2$.
4. Donner une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la courbe d'équation $y = \sqrt{-x^2-3x+4}$.

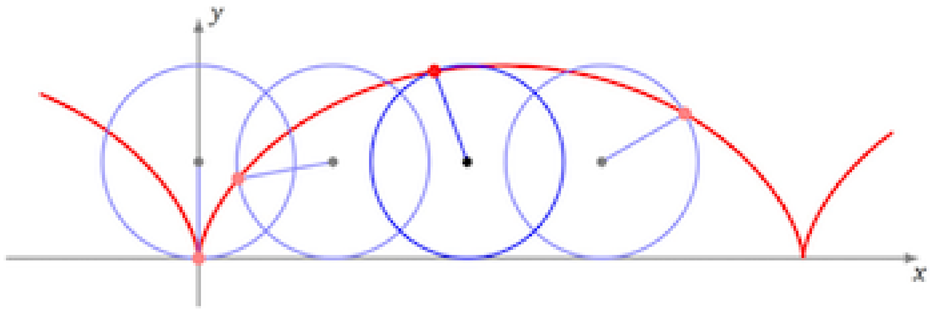
Exercice 3. Soit $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré défini par $\gamma(t) = (\cos t + 3, \sin t)$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée image de γ. Justifier que $\mathcal{C}$ ne peut pas être décrite par une équation de la forme $y = f(x)$.
Une courbe paramétrée n'est pas toujours le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

1. Donner une paramétrisation γ de $\mathscr{C}$ à l'aide de fonctions trigonométriques.
2. Soit $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \setminus \{0,1\}$. Montrer que $\mathscr{C}'$ peut être paramétré par

$$\beta = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Exercice 5 (Cycloïde)**.** On étudie la courbe représentative du trajet d'un point, située sur une roue de rayon $a > 0$ qui roule sans glisser sur une droite.



Montrer que cette courbe peut être paramétrée par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$