Feuille de TD 1 : Rappels sur les fonctions trigonométriques

Exercice 1 (Formules à connaître)**.** En utilisant l'identité $e^{it} = \cos t + i \sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, retrouver les égalités suivantes pour a, b dans $\mathbb{R}$

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
2. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,
3. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
4. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

En déduire les égalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}$

1. $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$
2. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

On rappelle le résultat (à connaître) suivant :

Proposition. *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable telle que pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$. Alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable et pour tout $s \in J$, $(f^{-1})'(s) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(s))}$.*

Exercice 2. 1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi, 2]$ sur $[-1, 1]$.

2. Soit arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ la bijection réciproque. Vérifier que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
4. Soit arccos : $[-1,1] \to [0, \pi]$ la bijection réciproque. Vérifier que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arccos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$.
5. Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi, 2[$ sur $\mathbb{R}$.
6. Soit arctan $:]-\pi/2, \pi, 2[\to \mathbb{R}$ la bijection réciproque. Vérifier que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 3. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. On note $t = \tan(\theta/2)$. Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de t.