Examen de première session – Mercredi 30 Avril 2025
Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Les calculatrices sont interdites. Aucun document n'est autorisé.
Ce sujet est constitué de 2 pages et de 4 exercices indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie : en particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié ultérieurement.

Exercice 1. — Questions de cours (3 points) —

1. Donner la définition du rang d'une application linéaire.
2. Enoncer le théorème du rang.
3. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égale à
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
Est-ce que f est une projection ? Est-ce que f est une symétrie ?

Exercice 2. — (3 points) —
Déterminer le noyau et le rang de chacune des 2 matrices suivantes :

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \ ; \ S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. — (4 points) —
On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P''$.

1. Vérifier que l'application f est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer le noyau $\ker(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
4. A-t-on $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

T.S.V.P.

UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025

LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

Examen de première session – Mercredi 30 Avril 2025
Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Exercice 4. — (10 points) —
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la formule suivante, où (x, y, z) sont les coordonnées d'un élément de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique :

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 2z\ ;\ x - 2z\ ;\ -x - y + z)\ .$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\ker(f)$. Est-ce que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. On définit les vecteurs $v_1 := e_1 + e_2$, $v_2 := e_1 + e_2 + e_3$ et $v_3 = e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Etant donné un entier $n \geq 1$, déterminer la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}'$.
6. En déduire une formule explicite pour calculer $f^n(x, y, z)$ pour tout entier $n \geq 1$.