UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

Examen de première session – Vendredi 5 Mai 2023
Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Les calculatrices sont interdites. Aucun document n'est autorisé.
Ce sujet est constitué de 2 pages et de 4 exercices indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie : en particulier, <u>les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.</u>

Le barème est donné <u>à titre indicatif</u> et pourra être légèrement modifié ultérieurement.

Exercice 1. — (3 points) —
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.
On pose $n := \dim_{\mathbb{R}}(E)$ et $m := \dim_{\mathbb{R}}(F)$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition du noyau $\ker(f)$.
2. Donner la définition de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
3. Enoncer le théorème du rang pour l'application f.

Exercice 2. — (5 points) —
On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = (P(0), P(1))$.

1. Vérifier que cette application f est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Calculer le noyau $\ker(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
4. Montrer que l'on a une décomposition en somme directe de la forme

$$\mathbb{R}_3[X] = \ker(f) \oplus \mathbb{R}_1[X] \ .$$

Exercice 3. — (4 points) —
Pour chacune des deux matrices suivantes, établir si la matrice est associée à une projection (resp. à une symétrie) et, le cas échéant, déterminer une base dans laquelle la matrice de la projection (resp. symétrie) associée est diagonale.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \ ; \ B := \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

T.S.V.P.

Examen de première session – Vendredi 5 Mai 2023
Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Exercice 4. — (8 points) —
Etant donné un paramètre réel m, on définit l'application $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_m(x, y) = (x + my, mx + (m - 1)y)\ ,$$

l'écriture (x, y) étant celle des vecteurs dans la base canonique $\mathcal{B} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Vérifier que f_m est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Ecrire la matrice de f_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (au départ et à l'arrivée).
3. Déterminer, selon la valeur de m, le noyau de f_m.
4. Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles l'application f_m est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
5. En déduire toutes les valeurs de m pour lesquelles la famille $\{f_m(e_1), f_m(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.