UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023
LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

Examen de seconde session – Vendredi 16 Juin 2023

Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Les calculatrices sont interdites. Aucun document n'est autorisé.
Ce sujet est constitué de 2 pages et de trois exercices indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie : en particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié ultérieurement.

Exercice 1. — (5 points) —
On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$f(1) = X^2 \ , \ f(X) = -1 + X + X^2 \ \text{ et } f(X^2) = X^2 \ .$$

1. Calculer $f(P(X))$ pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (Les coefficients a, b, c du polynôme sont donc des réels arbitrairement fixés.)
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Sans calculer l'espace $\mathrm{Im}(f)$, déduire de la question précédente la valeur de $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f))$.
   (On rappelle que $\mathrm{Im}(f)$ désigne l'image de l'application f.)
4. L'application f est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

Exercice 2. — (7 points) —
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} .$$

1. La matrice A est-elle une matrice de projection ? Si oui, déterminer ses éléments caractéristiques pour compléter la phrase suivante : *A représente la projection sur ... parallèlement à ...* .
2. La matrice A est-elle une matrice de symétrie ? Si oui, déterminer ses éléments caractéristiques pour compléter la phrase suivante : *A représente la symétrie par rapport à ... parallèlement à ...* .
3. Le cas échéant (c'est-à-dire si l'une des deux réponses précédentes est « oui »), déterminer une base dans laquelle la matrice de cette application est diagonale, et donner la matrice diagonale correspondante

T.S.V.P.

UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023
Licence 1 – Algèbre linéaire R. Abdellatif

Examen de seconde session – Vendredi 16 Juin 2023

Durée de l'examen (hors tiers-temps) : 2 heures

Exercice 3. — (8 points) —
On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $u(P) = P(X) - XP'(X)$.
On note $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$ et $e_4 = X^3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que u est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
3. Déterminer l'image par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. En déduire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de l'application linéaire u dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déterminer le noyau et l'image de A.
6. Est-ce que u est un isomorphisme d'espaces vectoriels ?