UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023
LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

TD 4 – Projecteurs et symétries : rappels et compléments

I) Projecteurs et symétries : quelques (contre-)exemples concrets

Exercice 1. —
On considère l'application $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p(x,y) := (4x - 6y, 2x - 3y)\ .$$

1. Vérifier que p est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Démontrer que p est une projection.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
4. Compléter la phrase suivante : « *p est la projection sur ... parallèlement à ....* »

Exercice 2. —
Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ parallèlement à $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
Exprimer $p(x,y,z)$ en fonction de (x,y,z).

Exercice 3. —
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ u(x,y,z) := \frac{1}{3}(x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z)\ .$$

1. L'application linéaire u est-elle une projection ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques.
2. L'application linéaire u est-elle une symétrie ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques.

II) Projecteurs et symétries : exploitation des définitions

Exercice 4. —
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On note p la projection sur F parallèlement à G.

1. Démontrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.
2. Démontrer que $2p - \mathrm{Id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
3. Démontrer que $\mathrm{Id}_E - 2p$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
4. Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$ et que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$.

Exercice 5. —
Soit $n \geq 2$ un entier. On note $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E. On considère les deux sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_i = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\left(\sum_{k=1}^{n} e_i\right)\ .$$

1. Montrer que F et G sont deux espaces supplémentaires dans E.
2. Expliciter la projection sur F parallèlement à G, puis la projection sur G parallèlement à F.
3. Expliciter la symétrie par rapport à F parallèlement à G, puis la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

TD 4 – Projecteurs et symétries : rappels et compléments

Exercice 6. —
Soit E un espace vectoriel réel et soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Démontrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Démontrer que $p+q$ est un projecteur ssi on a $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
3. En supposant que $p+q$ soit un projecteur, déterminer son noyau et son image.

III) Représentations matricielles des projecteurs et des symétries

Exercice 7. —
Pour chacune des cinq matrices suivantes, exprimées dans une base $\mathcal{B}$ fixée :

⋆ dire si cette matrice est associée à une projection ; à une symétrie ;

⋆ le cas échéant, calculer une base adaptée dans laquelle la matrice associée est diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. —
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = x - y$ et Δ la droite d'équation $x = -y = z$.

1. Déterminer une base de $\mathcal{P}$ puis une base de Δ.
2. Démontrer que l'on a $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \Delta$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à Δ.