UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025
LICENCE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE R. ABDELLATIF

TD 2 – Applications linéaires et matrices

I) Calcul de matrices associées à des applications linéaires

Exercice 1. —
On considère l'application $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ définie par $f(Q(X)) = Q'(X)$. On pose $P(X) := 3X + 2$ et $R(X) := 2X + 3$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} := (P(X), R(X))$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2. —
Soit $n \geq 1$ un entier. Vérifier que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, puis calculer leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, puis dans la base usuelle échelonnée en degré $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$, avec $e_j := \displaystyle\sum_{k=0}^{j} X^j$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.

- $\star$ $f_1 : P(X) \mapsto P'(X)$;
- $\star$ $f_2 : P(X) \mapsto \dfrac{1}{2}\left(P(X) + P(-X)\right)$;
- $\star$ $f_3 : P(X) \mapsto P(X) - P(0)$;
- $\star$ $f_4 : P(X) \mapsto 7P(X)$;
- $\star$ $f_5 : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Exercice 3. —
On considère les éléments f et g de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définis comme suit :

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y, z) := (2x + 3y - 4z, 2y + z, 2z) \ \text{ et } g(x, y, z) := (3x, 2x + 3y, x + y + 3z)\ .$$

1. Déterminer les matrices associées à f et à g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Après avoir justifié leur existence, déterminer les matrices associées à $f \circ g$, $g \circ f$ et $f + g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les matrices associées à $f^2 := f \circ f$ et $g^2 = g \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Reprendre les trois questions précédentes en remplaçant à chaque fois la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la base $\mathcal{B}' = \{(1\ 0\ 0), (2\ 1\ 0), (3\ 0\ -1)\}$.

II) Rang et noyau d'une matrice quelconque

Exercice 4. —
A quelle condition nécessaire et suffisante une matrice est-elle de rang nul ?

Exercice 5. —
Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

TD 2 – Applications linéaires et matrices

Exercice 6. —
Déterminer le noyau des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 7. —
Sans calculer leur déterminant, déterminer lesquelles de ces matrices sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

III) Matrices de passage et changements de base

Exercice 8. —
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit les vecteurs suivants :

$$f_1 = -e_1 + e_3,\ f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3,\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3\ .$$

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.
4. Si un vecteur a pour coordonnées (x, y, z) dans la base canonique, quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 9. —
Soit $u := \left[(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - 2y, 3y) \in \mathbb{R}^2\right]$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer la matrice de u dans $\mathcal{B}$ de deux manières différentes.

Exercice 10. —
Soit u l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3).
Posons $f_1 := e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 := e_1 + e_3$ et $f_3 := e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.