TD 1 – Applications linéaires, éléments caractéristiques

I) Généralités sur les applications linéaires : noyau, image et rang

Exercice 1. —
Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est une application $\mathbb{K}$-linéaire.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (xy,\ y) \in \mathbb{C}^2$;
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y,\ y + z,\ z + x) \in \mathbb{R}^3$;
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + 1,\ x - y) \in \mathbb{R}^2$;
4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (|x|,\ y,\ 0) \in \mathbb{R}^3$;
5. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : \phi \in \mathcal{C}^1 \mapsto \phi' \in \mathcal{C}^0$, où $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^0$) est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles et continuement dérivables (resp. continues) ;
6. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : \phi \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \mapsto \int_{-1}^{1} \phi(t)dt \in \mathbb{R}$, où $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[-1, 1]$.

Exercice 2. —
Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications $\mathbb{R}$-linéaires suivantes :

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y, y - x, 0) \in \mathbb{R}^3$;
2. $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, y - z, z - x) \in \mathbb{R}^3$;
3. $h : P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(X) - (X + 1)P'(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.

(On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.)

Exercice 3. —
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = (1, 0),\ f(0, 1, 0) = (1, 1) \text{ et } f(0, 0, 1) = (0, 1) .$$

1. Déterminer la valeur de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 4. —
On considère l'application $f : P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que f est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
4. Montrer que l'on a une décomposition en somme directe de la forme

$$\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathbb{R}_1[X] .$$

TD 1 – Applications linéaires, éléments caractéristiques

II) Un cas particulier important : les endomorphismes d'un espace vectoriel

Exercice 5. —
Etant donné un paramètre réel m, on définit l'application $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ f_m((x, y, z)) = (x + y + z, mx + y + (m-1)z, x + my + z) \ .$$

1. Vérifier que f_m est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Déterminer, selon la valeur de m, le noyau et l'image de f_m.
3. Pour quelles valeurs de m l'application f_m est-elle un isomorphisme ?
4. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $(f_m(e_1), f_m(e_2), f_m(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. —
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont on fixe une base (e_1, e_2, e_3, e_4). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} u(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4 \\ u(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 \\ u(e_3) = e_1 + e_4 \\ u(e_4) = e_2 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

1. Que vaut l'endomorphisme $u^2 := u \circ u$?
2. En déduire que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 7. —
Donner un exemple d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les deux conditions suivantes :
$\star$ $\mathrm{Im}(u)$ est engendré par $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (1, 1, -1)$;
$\star$ $\mathrm{Ker}(u)$ est engendré par $v_3 = (1, -1, 0)$.

Exercice 8. —
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit u^k par

$$u^k = u \circ u \circ ... \circ u \ (k \text{ fois}) \ .$$

On suppose que u est *nilpotent d'ordre* p, i.e. que p est le plus petit entier naturel tel que $u^p = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{u^k(x), 0 \leq k \leq p-1\}$ est une famille libre.
2. En déduire que l'on a forcément $p \leq n$, i.e. que l'on a $u^n = 0$.

UPJV – UFR des Sciences 2024 - 2025

Licence 1 – Algèbre linéaire R. Abdellatif

TD 1 – Applications linéaires, éléments caractéristiques

Exercice 9. —
Soient E un espace vectoriel et $f \in (E)$ un endomorphisme de E.
Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont tous trois en somme directe.

Exercice 10. —
Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 dont on fixe une base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3 \ \text{ et } f(e_3) = e_1 \ .$$

1. Calculer $f(x)$ pour tout élément x de E.
2. Vérifier que l'on a $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
3. On pose $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $W = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
   (a) Déterminer une base de V et une base de W.
   (b) Démontrer que l'on a $E = V \oplus W$.
   (c) Démontrer que l'on a $f(V) = V$ et $f(W) = W$.

III) Compléments sur les applications linéaires en général

Exercice 11. —
Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ ssi $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de $\mathrm{Ker}(g)$.

On suppose maintenant que $E = F = G$.

2. Démontrer que si f et g commutent (i.e. si $f \circ g = g \circ f$), alors on a $f(\mathrm{Ker}(g)) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que l'assertion réciproque est vraie si g est un projecteur.

Exercice 12. —
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, démontrer l'équivalence des assertions suivantes.

(a) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$;
(b) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$;
(c) $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$;
(d) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.