Rappels et exercices sur la réduction des endomorphismes. Réduction de Jordan

Par défaut, on fixe k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera χ_u le polynôme caractéristique de u, et π_u son polynôme minimal.

† *Polynômes d'endomorphismes*

Exercice 1. 1. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

  (i) π_u est scindé à racines simples.

  (ii) u annule un polynôme scindé à racines simples.

2. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u annule un polynôme scindé à racines simples dans $k[X]$. En déduire que π_u est alors scindé à racines simples.
3. Réciproquement, supposons que π_u est scindé à racines simples. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 2. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) π_u est scindé.

(ii) χ_u est scindé.

(iii) u annule un polynôme scindé.

Exercice 3. Soit F un corps fini de cardinal q. On rappelle que tout élément de F est racine du polynôme $X^q - X$.

1. Montrer que $X^q - X$ est scindé à racines simples dans $F[X]$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(F)$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^q - M = 0$.

Exercice 4. On suppose que k est algébriquement clos de caractéristique non 2.

1. On suppose que $u \in \mathrm{GL}(E)$ et que u^2 est diagonalisable. En déduire que u est diagonalisable.
2. Trouver un contre exemple dans le cas où u n'est pas inversible.
3. On suppose maintenant que k est de caractéristique 2. Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecte les conditions de la première question sans être diagonalisable.

† *Endomorphismes nilpotents*

Exercice 5 (Une caractérisation des nilpotents (MG2017))**.**

1. Montrer que si u est nilpotent, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{tr}(u^p) = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit π_u comme $X^k Q(X)$, avec $Q(0) \neq 0$ (on a factorisé par X au maximum). On pose $F := \mathrm{Ker}\, u^k$ et $G := \mathrm{Ker}(Q(u))$. On va montrer par l'absurde que $G = \{0\}$.
   (a) Montrer que $E = F \oplus G$ et que cette décomposition est une décomposition en sous-espaces stables par u.
   (b) On suppose $G \neq \{0\}$ et on note u_G l'endomorphisme de G induit par u. Montrer que $Q(u_G) = 0$ et en déduire qu'il existe $i > 0$ tel que les traces de u_G^i et u^i soient non nulles.
   (c) Conclure

Exercice 6 (MG2017)**.** On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice 2 avec $\dim E = 4$. On pose $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soient X, Y deux partitions d'un entier n. Montrer que $X \leqslant Y$ si et seulement si $Y^* \leqslant X^*$.

Exercice 8 (Encore une caractérisation des nilpotents)**.**
Supposons que k est de caractéristique non 2. Montrer que u est nilpotent si et seulement si u est semblable à $2u$.

Exercice 9 (Caractérisation topologique des endomorphisme nilpotents)**.**
On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que u est nilpotent si et seulement si la classe de similitude de u contient 0 dans son adhérence.

† *Calcul de réduction de Jordan*

Exercice 10. Pour tout $m \in \mathbb{C}$, on considère la matrice

$$A_m := \begin{pmatrix} 2 & m-1 & -1 \\ 1-m & m & m-1 \\ 1 & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on admet que son polynôme caractéristique est $\chi_{A_m} = (X-m)(X-1)^2$.

1. Donner, selon la valeur de m, les valeurs propres de A_m et leur multiplicités.
2. Déterminer, selon la valeur de m, le polynôme minimal de A_m. En déduire les valeurs de m pour lesquelles A_m est diagonalisable. Diagonaliser A_m le cas échéant.
3. Dans les autres cas, donner la réduite de Jordan de A_m, ainsi qu'une base de Jordanisation.

† *Applications*

Exercice 11.
1. Montrer que la transposée d'une matrice de Jordan lui est semblable.
2. On suppose k algébriquement clos. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(k)$ est semblable à sa transposée.
3. Généraliser ce résultat au cas où k n'est pas algébriquement clos.

Exercice 12. On pose respectivement $D_n^{\text{reg}}(k)$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres disinctes, $D_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables, $T_n(k)$ l'ensemble des matrices trigonalisables.

1. Montrer que $D_n^{\text{reg}}(k)$ inclus dans $D_n(k)$.
2. On suppose à partir d'ici que $k = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ est dense dans $D_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite d'éléments de $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$.
4. En déduire que $T_n(\mathbb{K})$ est inclus dans l'adhérence de $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ et de $D_n(\mathbb{K})$.
5. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   (a) Montrer que $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$. En déduire une nouvelle preuve de Cayley-Hamilton.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   (a) Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $D_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(\chi_{D_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}$ est convergente.
   (b) En déduite que le polynôme minimal de la limite D_∞ de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) En déduire que $T_n(\mathbb{R})$ est égal à l'adhérence de $D_n^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ et de $D_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (Surjectivité de l'exponentielle)**.** On rappelle que toute matrice unipotente U admet un logarithme $L(U)$ tel que $\exp(L(U)) = U$.

1. Soit $J_n(\lambda)$ un bloc de Jordan avec $\lambda \neq 0$. Construire une matrice $L_n(\lambda)$ telle que $\exp(L_n(\lambda)) = J_n(\lambda)$.
2. Montrer que toute matrice de Jordan inversible admet un antécédent par l'exponentielle.
3. Conclure que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.