Rappels et exercices sur la réduction des endomorphismes. Réduction de Jordan

Par défaut, on fixe k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera χ_u le polynôme caractéristique de u, et π_u son polynôme minimal.

Contents

1 Rappels sur les polynômes d'endomorphismes

On sait que $(k[X], +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. De plus, comme k est un corps, cet anneau est euclidien et principal. De façon similaire, $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire.

Lemme 1.1 (**Polynômes d'endomorphismes**). *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_u : & k[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & P(X) & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux. L'image $k[u]$ de ce morphisme est l'ensemble des polynômes d'endomorphismes *en l'endomorphisme u.*

Comme $k[X]$ est commutatif, son image $k[u]$ est également commutatif. Comme $u \in k[u]$, on obtient que $k[u]$ est inclus dans le *commutant* $\mathcal{C}(u)$ de u. À priori cependant, on a $k[u] \subsetneq \mathcal{C}(u)$. Par exemple, on a

$$\mathcal{C}(\mathrm{Id}) = \mathcal{L}(E) \text{ et } k[\mathrm{Id}] = \{\lambda I_d \mid \lambda \in k\}.$$

Définition 1.2 (**Polynôme annulateur**). Les éléments de l'ensemble $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_u$ sont appelés les *polynômes annulateurs* de u.

Soit $g \in \mathrm{GL}(E)$. Pour $P \in k[X]$, on a assez clairement $P(gug^{-1}) = gP(u)g^{-1}$. En particulier, l'idéal des polynômes annulateurs de u ne dépend que de la classe de similitude de u.

Comme $k[X]$ est un anneau euclidien, l'idéal $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_u$ est monogène et engendré par un élément de degré minimal. Quitte à renormaliser, l'idéal $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ev}_u$ admet un unique générateur unitaire, le *polynôme minimal* π_u de u.

Théorème 1.3 (Cayley-Hamilton).
Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u. En d'autres termes, π_u divise χ_u.

Les racines du polynôme caractéristique sont par définition les valeurs propres de u. Si le théorème ci-dessus entraîne clairement que les racines de π_u sont des valeurs propres de u, la réciproque est plus surprenante et néanmoins vraie.

Lemme 1.4. *Les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme minimal.*

Proof. Soit α une racine de π_u. Par Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(\alpha) = 0$, et donc α est une valeur propre de u. Réciproquement, soit λ une valeur propre de u. Il existe par hypothèse un $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Par une récurrence immédiate, on a $u^n(x) = \lambda^n x$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que

$$\forall P \in k[X],\ P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

En particulier, $0 = \pi_u(u)(x) = \pi_u(\lambda)x$, et donc $\pi_u(\lambda) = 0$ puisque x est non nul. □

On sait que λ est une racine de π_u si et seulement si $X - \lambda$ divise π_u dans $k[X]$. Le lemme ci-dessus nous en apprend donc sur les facteurs de degré 1 de π_u et de χ_u. On peut généraliser ce résultat en un résultat sur les facteurs irréductibles de π_u et χ_u.

Proposition 1.5. *Les facteurs irréductibles de π_u et χ_u sont les mêmes.*

Proof. Là encore, tout facteur irréductible de π_u est aussi un facteur irréductible de χ_u, il suffit donc de montrer la réciproque. Il est plus simple de tout formuler en terme de matrice. Soit donc $\mathcal{B}$ une base de E et $M \in \mathcal{M}_n(k)$ la matrice de u dans cette base. Soit P un facteur irréductible de χ_u et soit L une extension de k dans laquelle P admet une racine α. Par définition, α est une valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(k) \subset \mathcal{M}_n(L)$. Comme le polynôme minimal est invariant par extension de corps, le lemme précédent prouve que α est également une racine de π_u. Autrement dit, π_u est inclus dans le noyau du morphisme $k[X] \to L$ qui évalue les polynômes en α. Comme P est irréductible, et qu'il annule également α, on obtient que P engendre cet idéal annulateur de α et que P divise π_u. □

Ainsi, si $\chi_u = \prod_{i=1}^p P_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en produit de facteurs irréductibles de χ_u, alors on a $\pi_u = \prod_{i=1}^p P_i^{\beta_i}$ avec $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout i, au lieu de $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ qu'on aurait à priori avec Cayley-Hamilton.

Lemme 1.6 (Lemme des Noyaux). *[Gri90, Lemme 6.21]*
Soit $P(X) = P_1(X) \cdots P_r(X)$ un produit de polynômes deux à deux premiers entre eux. On a

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

En particulier, si P est annulateur de u, on obtient $E = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

Le lemme des noyaux est un outil important, qui permet notamment de démontrer le théorème classique suivant.

Théorème 1.7 (Caractérisation des diagonalisables).
Les assertions suivantes sont équivalentes
(i) π_u est scindé à racines simples.
(ii) Il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples de u.
(iii) u est diagonalisable.

Proof. **Exercice 1** du TD. □

Un des buts de ce cours est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.8 (Caractérisation des trigonalisables).
Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) π_u *est scindé.*
(ii) χ_u *est scindé.*
(iii) *Il existe un polynôme annulateur scindé de* u.
(iv) u *est trigonalisable.*

L'équivalence des points $(i), (ii)$ et (iii) fait l'objet de l'**Exercice 2** du TD. De même, comme le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est scindé, $(iv) \Rightarrow (ii)$ est clair. La réelle difficulté dans la suite sera de montrer que (ii) implique (iv), ce que nous ferons justement via la réduite de Jordan.
Exercice 3,4 du TD.

2 Endomorphismes nilpotents

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Nilpotent). L'endomorphisme u est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. On définit alors l'*indice de nilpotence* de u comme le plus petit entier r tel que $u^r = 0$.

Un élémentaire raisonnement d'algèbre linéaire permet de majorer facilement l'indice de nilpotence d'un endomorphisme :

Lemme 2.2. *On a équivalence entre*

(i) u *est nilpotent.*
(ii) $\chi_u = X^n$.
(iii) *La seule valeur propre de* u *dans une clôture algébrique de* k *est* 0.

Proof. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Cela signifie que u est annulé par le polynôme X^p. Par définition du polynôme minimal, on a que π_u divise X^p, et donc π_u est de la forme X^r pour un certain r. Comme X est le seul facteur irréductible de X^r, on obtient par la Proposition 1.5 que le seul facteur irréductible de χ_u est X. Comme χ_u est de degré n, on a $\chi_u = X^n$. Comme 0 est l'unique valeur propre de X^n, on obtient bien que 0 est la seule valeur propre de u.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On se place dans une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Dans $\overline{k}[X]$, on sait que χ_u est scindé, et ses racines sont les valeurs propres de u dans $E \otimes \overline{k}$. Comme toutes ces valeurs sont nulles, on obtient que $\chi_u = X^n$. Par Cayley-Hamilton, on trouve $u^n = 0$ et donc u est nilpotent. □

Remarque 2.3. Supposons que u est à la fois nilpotent et diagonalisable. Comme la seule valeur propre de u est 0, on trouve que u doit être semblable à l'endomorphisme nul. Autrement dit, le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul lui-même.

Proposition 2.4 (Une caractérisation des nilpotents). *Un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est nilpotent si et seulement si* $\operatorname{tr}(u^p) = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$.

Proof. **Exercice 5** du TD. □

On suppose dans la suite de la section que u est nilpotent d'indice r.

Une des clefs pour étudier les endomorphismes nilpotents est la suite des noyaux emboîtés qui "s'essouffle" (terminologie de [H2G2]).

Définition 2.5 (Suite des noyaux emboîtés). Pour $i \geqslant 0$, on pose $K_i := \mathrm{Ker}(u^i)$ et $k_i := \dim K_i$. La suite

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = E$$

forme la *suite des noyaux emboîtés* associée à u.

Lemme 2.6. *On a*

$$\forall x \in E, i \geqslant 1,\ x \in K_i \Leftrightarrow u(x) \in K_{i-1}.$$

En particulier, on a $\mathrm{Im}\, u^i \subset K_{r-i}$ *pour* $i \in [\![0, r]\!]$.

Proof. On a $x \in K_i \Leftrightarrow u^i(x) = 0 \Leftrightarrow u^{i-1}(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) \in K_{i-1}$. On a alors par une récurrence immédiate que

$$x \in K_r = E \Leftrightarrow u^{r-i}(x) \in K_i$$

Donc $\mathrm{Im}\, u^{r-i}(x) \subset K_i$. □

Proposition 2.7. *Pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$, *il existe un sous-espace* G_i *de* E *respectant les conditions suivantes :*

- $K_i = K_{i-1} \oplus G_i$.
- $u(G_i) \subset G_{i-1}$.
- $u_{|G_i}$ *est injectif.*

Proof. On construit la suite des G_i par une récurrence descendante, en partant de G_r. On définit G_r comme un supplémentaire arbitraire de K_{r-1} dans $K_r = E$. Ensuite, supposons construits les ensembles $G_{i+1}, \ldots, G_r$ pour un certain $i \in [\![1, p-1]\!]$, satisfaisant les deux premières propriétés.
Comme $G_{i+1} \subset K_{i+1}$ par définition, on a $u(G_{i+1}) \subset u(K_{i+1}) \subset K_i$ par le Lemme 2.6.
Ensuite, on a $u(G_{i+1}) \cap K_{i-1} = \{0\}$. En effet, soit y dans l'intersection. Par hypothèse, on a $y = u(x)$ pour un certain $x \in G_{i+1} \subset K_{i+1}$. D'après le Lemme 2.6, on a que $u(x) \in K_{i-1}$ entraîne $x \in K_i$. On a donc $x \in G_{i+1} \cap K_i$, qui vaut $\{0\}$ puisque $K_i \oplus G_{i+1} = K_{i+1}$ par hypothèse de récurrence.
Comme $u(G_{i+1} \cap K_{i-1} = \{0\}$, les espaces $u(G_{i+1})$ et K_{i-1} sont en somme directe, et on peut choisir F un supplémentaire dans K_i de la somme $u(G_{i+1}) \oplus K_{i-1}$. On a alors

$$K_i = F \oplus u(G_{i+1}) \oplus K_{i-1}$$

et on pose $G_i := F \oplus u(G_{i+1})$. On a bien $u(G_{i+1}) \subset G_i$ et $K_{i-1} \oplus G_i = K_i$ par construction, ce qui termine la récurrence.

Enfin, pour l'injectivité de u restreint à G_i. On montre que le noyau de u restreint à G_i est trivial, ce qui découle rapidement de $\mathrm{Ker}\, u_{|G_i} = \mathrm{Ker}\, u \cap G_i = K_1 \cap G_i \subset K_i \cap G_i = \{0\}$. □

Pour résumer, G_i est construit en rajoutant à $u(G_{i+1})$ ce qui manque pour faire un supplémentaire de K_{i-1} dans K_i. Par construction, comme $K_0 = \{0\}$, on a $G_1 = K_1 = \mathrm{Ker}\, u$. Par une récurrence rapide, on obtient que

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ K_i = \bigoplus_{j=1}^{i} G_j.$$

Corollaire 2.8 (La suite s'essouffle).
On pose $Y_i := \dim G_i = k_i - k_{i-1}$. *Pour tout* $i \in [\![1, r-1]\!]$, *on a* $Y_i \geqslant Y_{i+1}$.

Proof. D'après la Proposition 2.7, on a que $\dim u(G_i) = \dim G_i$ puisque u est injectif sur G_i. Comme $u(G_i) \subset G_{i-1}$, on en déduit que $\dim G_{i+1} \geqslant \dim u(G_i) = \dim G_i$. □

On dit que la suite s'essouffle au sens ou $k_i - k_{i-1} \geqslant k_{i+1} - k_i \geqslant 0$. En interprétant $k_i - k_{i-1}$ comme un "taux d'accroissement", on obtient que la suite (k_i) croit de moins en moins vite: elle s'essouffle.
Exercice 6 du TD.

Définition 2.9 (Partition associée à un endomorphisme nilpotent). On définit $Y(u)$ comme la suite $Y(u) = (\dim G_1, \ldots, \dim G_r)$. Il s'agit d'une partition de l'entier n.

On refait la théorie élémentaire des partitions d'entiers dans la section suivante. On peut déjà noter que $Y(u)$ est une suite décroissante par le Corollaire 2.8, et que la somme des Y_i vaut n puisque la somme directe de $G_1, \ldots, G_r$ est égale à $K_r = E$.

Lemme 2.10. *Pour tout $g \in \mathrm{GL}(E)$, on a $Y(u) = Y(gug^{-1})$. Autrement dit, la partition associée à un nilpotent ne dépend que de sa classe de similitude.*

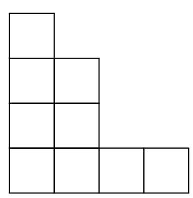
Proof. Soit $x \in E$, on a $gug^{-1}(x) = 0$ si et seulement si $u(g^{-1}(x)) = 0$. Ceci équivaut à $g^{-1}(x) \in \operatorname{Ker} u$ et à $x \in g(\operatorname{Ker} u)$. On a donc $\operatorname{Ker}(gug^{-1}) = g(\operatorname{Ker} u)$. Comme g est inversible, il est en particulier injectif, et on obtient que $\dim \operatorname{Ker}(gug^{-1}) = \dim \operatorname{Ker} u$. Ceci est également vrai pour toutes les puissances de u. Autrement dit, la suite des dimensions des noyaux emboîtés de u et de gug^{-1} sont égales. Comme les suites $Y(u)$ et $Y(gug^{-1})$ ne dépendent que de ces dernières, on obtient qu'elles sont égales. □

2.2 Partitions et tableaux de Young

Exceptionnellement dans cette section, n désigne un élément arbitraire de $\mathbb{N}^*$.

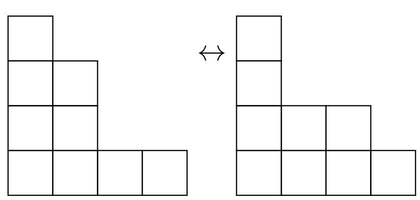
Définition 2.11 (Partition d'un entier). Une *partition* Y de n est une suite décroissante d'entiers positifs et non nuls $Y_1 \geqslant Y_2 \geqslant \ldots \geqslant Y_p$ telle que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p = n$. On note $Y \vdash n$ pour exprimer que Y est une partition de n.
A toute partition Y de n est associé un *tableau de Young*, formé de cases et dont la i-ème colonne contient Y_i cases.

Par exemple, la partition $(4, 3, 1, 1)$ de l'entier 9 est associée au tableau de Young suivant.



Remarque 2.12. J'ai choisi d'écrire les tableaux de Young en les alignant sur la ligne du bas. L'autre convention existe.

On admet (c'est visuellement clair et il est peu instructif d'en faire la preuve, qui est dans [H2G2, Annexe III.B]) que le symétrique d'un tableau de Young par la première diagonale est encore un diagramme de Young. La partition représentée par ce symétrique est dite *partition duale* de la partition de départ.



La définition formelle du dual d'une partition est la suivante:

Définition 2.13 (Partition duale). Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_p) \vdash n$ une partition. Pour $i \geqslant 1$, on pose

$$X_i := \#\{j \in [\![1, p]\!] \mid i \leqslant Y_j\}$$

La suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est décroissante, et ses termes non nuls forment une partition de n. On note $Y^* := X$ et on l'appelle *partition duale* de Y.

L'exemple ci-dessus montre que $(4, 3, 1, 1)^* = (4, 2, 2, 1)$. On peut montrer abstraitement que l'application de dualité est une involution de l'ensemble des partitions de n (i.e. on a toujours $X^{**} = X$), mais il est beaucoup plus facile de s'en convaincre avec les diagrammes de Young, puisque la dualité est une symétrie sur les diagrammes de Young, donc d'ordre 2.

Une autre caractéristique utile de l'ensemble des partitions d'un entier n est qu'il est muni d'une relation d'ordre.

Définition 2.14 (**Ordre de dominance sur les partitions**). Soient $X, Y \vdash n$ deux partitions. On définit la relation $\leqslant$ en définissant $X \leqslant Y$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=1}^{k} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} Y_i.$$

En convenant que l'on prolonge X et Y par 0 après leurs termes non nuls. En notant $X = (X_1, \dots, X_p)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_r)$, on a $X \leqslant Y$ si et seulement si $p \geqslant r$ et $X_1 \leqslant Y_1$, $X_1 + X_2 \leqslant Y_1 + Y_2, \dots$ jusqu'à $X_1 + \cdots + X_r \leqslant n$, puis $X_1 + \cdots + X_{r+1} \leqslant n, \dots$ jusqu'à enfin $n \leqslant n$.

On vérifie facilement que $\leqslant$ forme un ordre sur l'ensemble des partitions de n. On peut interpréter l'ordre $\leqslant$ via les diagrammes de Young avec les "relations badaboum". On dira que $X \leqslant_{el} Y$ si le diagramme de Young de X s'obtient à partir de celui de Y en faisant "tomber" une case du sommet d'une colonne sur une colonne à sa droite (attention: ma convention n'est pas tout à fait la même que celle de [H2G2]).

Proposition 2.15. *[H2G2, Proposition III.B.3.3] L'ordre $\leqslant$ sur les partitions de n est engendré par les relations élémentaires $\leqslant_{el}$, au sens où $X \leqslant Y$ si et seulement s'il existe une suite $X_0, \dots, X_k$ de partitions telles que*

- $X_0 = X$, $X_k = Y$.
- $X_0 \leqslant_{el} X_1 \leqslant_{el} X_2 \leqslant_{el} \dots \leqslant_{el} X_k$.

Dans [H2G2] est donnée une description complète de l'ordre $\leqslant$ via les relations badaboum dans le cas $n = 6$. Attention cependant aux conventions...

En utilisant cette proposition, il est relativement facile de montrer que l'application de dualité induit un "antiautomorphisme" de l'ensemble des partitions de n, ordonné par $\leqslant$.

Proposition 2.16. *Soient X et Y deux partitions de n. Montrer que $X \leqslant Y$ équivaut à $Y^* \leqslant X^*$.*

Proof. **Exercice 7** du TD. □

2.3 Réduction de Jordan des nilpotents

On reprend la situation précédente, où E est un k-espace vectoriel de dimension n, et où $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent.

On a maintenant les armes pour définir la réduite de Jordan de l'endomorphisme u, ce qui commence par la définition des blocs de Jordan.

Définition 2.17 (**Bloc de Jordan**). Soit $m \geqslant 1$ un entier. On définit le *bloc de Jordan* de taille m par

$$J_m = J_m(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour $\lambda \in k$, on pose $J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m$. Une *matrice de Jordan* est une matrice diagonale par block avec des blocs de Jordan sur la diagonale.

Par construction, J_k est nilpotent d'indice k. En effet, en notant $e_1, \dots, e_m$ la base canonique de k^m, on a $J_m.e_i = e_{i-1}$ pour $i \geqslant 2$ et $J_m.e_1 = 0$. Ainsi, le noyau de $(J_m)^i$ est $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et est donc de dimension i. En particulier, J_m est nilpotent d'indice m, et la partition de m associée est $(1, 1, \dots, 1) \vdash m$.

Avant de définir la réduite de Jordan de u, on introduit une notation pour les matrices de Jordan associées à une partition de n.

Notation 2.18. Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_r)$ une partition de n, on pose J_Y la matrice de Jordan donnée par

$$J_Y = \mathrm{diag}(J_{Y_1}, J_{Y_2}, J_{Y_3}, \dots, J_{Y_p})$$

La première chose que nous montrons est que la partition associée à une matrice de Jordan est facile à comprendre.

Lemme 2.19. *Soit Y une partition de n, la matrice J_Y est une matrice nilpotente, et la partition de n qui lui est associée est le dual Y^* de Y.*

Proof. Cela découle simplement de la formule

$$\mathrm{Ker}\, J_Y^m = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, J_{Y_i}^m.$$

□

En particulier, on obtient (ce n'était pas si évident autrement) que toute partition de n est la partition associée à un certain endomorphisme nilpotent. Le résultat principal sur la réduction des endomorphismes nilpotents est une sorte de réciproque au résultat ci-dessus: tout endomorphisme nilpotent est semblable à la matrice de Jordan J_{Y^*}, où Y est la partition de n associée à l'endomorphisme considéré :

Proposition 2.20 (Existence d'une réduite de Jordan). *Soit u un endomorphisme nilpotent, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $J_{Y(u)^*}$.*

Proof. Notons r l'indice de nilpotence de u, et notons $Y = Y(u) = (Y_1, \dots, Y_r)$. On reprend les notation de la Proposition 2.7 et de sa preuve :

- K_i est le noyau de u^i pour $i \in [\![1, r]\!]$.
- G_i est un supplémentaire de K_{i-1} dans K_i pour $i \in [\![1, r]\!]$.
- F_i est un supplémentaire de $u(G_{i+1})$ dans G_i pour $i \in [\![1, r-1]\!]$. On prolonge la notation par $F_r = G_r$.

On rappelle que $\dim G_i = Y_i$ et que $\dim F_i = Y_i - Y_{i+1}$ avec la convention que $Y_{r+1} = 0$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on considère $x^i_{Y_{i+1}+1}, \dots, x^i_{Y_i}$ une base de F_i. En particulier pour $i = r$, on a une base $x^r_1, \dots, x^r_{Y_r}$ de $F_r = G_r$.

Comme $F_r = G_r$, la suite $u(x^r_1), \dots, u(x^r_{Y_r})$ est une base de $u(G_r)$ d'après la Proposition 2.7, la suite $x^{r-1}_{Y_r+1}, \dots, x^{r-1}_{Y_{r-1}}$, qui est une base du supplémentaire F_{r-1} de $u(G_r)$ dans G_{r-1}, donne une base

$$u(x^r_1), \dots, u(x^r_{Y_r}), x^{r-1}_{Y_r+1}, \dots, x^{r-1}_{Y_{r-1}}$$

de G_{r-1}. En appliquant u à cette base, on obtient une base de $u(G_{r-1})$, qu'on complète en une base de G_{r-2} en y ajoutant notre base de F_{r-2}. En itérant cette procédure, on obtient une base de chaque G_i pour $i \in [\![1, r]\!]$. Comme E est la somme directe de tous les G_i, on obtient une base de E, donnée par

$$\left\{ u^m(x^i_j) \mid i \in [\![1, r]\!], m < i, j \in [\![Y_{i+1} + 1, Y_i]\!] \right\}.$$

C'est en réordonnant cette base que l'on va obtenir notre base de Jordanisation. Rappelons que Y_1 est la longueur de la partition duale Y^*. Fixons $j \in [\![1, Y_1]\!]$. Comme la suite (Y_i) est décroissante de Y_1 vers 0, il existe un unique $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $j \in [\![Y_{i+1}+1, Y_i]\!]$, et ce i est en fait la valeur de Y_j^*. La famille $u^{i-1}(x_j^i), \dots, u(x_j^i), x_j^i$ est stable par u, et la matrice de u dans cette famille est un bloc de Jordan $J_i = J_{Y_j^*}$. On écrit donc notre base dans l'ordre

- $u^{Y_1^*-1}(x_1^{Y_1^*}), \dots, u(x_1^{Y_1^*}), x_1^{Y_1^*}$, puis
- $u^{Y_2^*-1}(x_2^{Y_2^*}), \dots, u(x_2^{Y_2^*}), x_2^{Y_2^*}$, puis
- $\vdots$
- $u^{Y_{Y_1}^*-1}(x_{Y_1}^{Y_{Y_1}^*}), \dots, u(x_{Y_1}^{Y_{Y_1}^*}), x_{Y_1}^{Y_{Y_1}^*}$.

Et on obtient que la matrice de u dans cette base est J_{Y^*} comme annoncé. □

Une façon commode de visualiser la preuve ci-dessous est de "remplir le diagramme de Young" associé à l'endomorphisme u. La i-ème colonne de ce tableau est de longueur Y_i et représente l'espace G_i. On rempli d'abord la dernière colonne avec la base $x_1^r, \dots, x_{Y_r}^r$. Puis, en appliquant u, on décale ces résultats dans la colonne de gauche. Si F_{r-1} est non trivial, alors il faut compéter cette colonne en ajoutant la base $x_{Y_r+1}^{r-1}, \dots, x_{Y_{r-1}}^{r-1}$. On itère ce processus encore et encore jusqu'à avoir rempli toutes les colonnes. Pour obtenir la base finale, on lit alors les coefficients du tableau de Young lignes par lignes.

Exemple 2.21. On considère $k = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}^3$. Considérons la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $M^2 = 0$, donc M est nilpotente d'indice 2. Ensuite, les noyaux emboîtés sont donnés par

$$K_0 = \{0\},\ K_1 = \mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), K_2 = E.$$

La partition $Y(M)$ est donc $(2,1)$. Soit G_2 un supplémentaire à K_1 dans E, disons $G_2 = \mathrm{Vect}(x_1^2)$ avec $x_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remplit donc le tableau de Young correspondant

$$\begin{ytableau} \ \\ \ & x_1^2 \end{ytableau}$$

L'image $M(x_1^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $u(G_2)$, on remplit donc le tableau de Young

$$\begin{ytableau} \ \\ M(x_1^2) & x_1^2 \end{ytableau}$$

On remplit ce qui manque dans la première colonne en construisant un supplémentaire à $u(G_2)$ dans $G_1 = K_1$, on prend $x_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on remplit

$$\begin{array}{|c|c} \hline x_2^1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \hline M(x_1^2) & \multicolumn{1}{|c|}{x_1^2} \\ \hline \end{array}$$

En lisant les lignes du tableau (de la plus basse à la plus haute), on obtient une base

$$M(x_1^2), x_1^2, x_2^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans laquelle la matrice M devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.22 (**Jordan**). *Soient u, v deux endomorphismes nilpotents. Les endomorphismes u et v sont semblables si et seulement si les partitions $Y(u)$ et $Y(v)$ sont égales.*

Proof. Si u et v sont semblables, alors $Y(u) = Y(v)$ par le Lemme 2.10. Réciproquement, si $Y(u) = Y(v) = Y$, alors les matrices de u et de v dans des bases adéquates sont toutes deux égales à J_{Y^*}. Ainsi, u et v sont semblables. □

Pour aider à la compréhension, on donne une autre formulation équivalente du théorème ci-dessus (on laisse la preuve en exercice).

Théorème 2.23 (**Jordan, autre formulation**). *Soit u un endomorphisme nilpotent. Il existe une unique partition X de n telle que la matrice de u dans une bonne base est la matrice de Jordan J_X*

Bien-sûr, la partition X n'est autre que le dual de la partition $Y(u)$ associée à u.

Corollaire 2.24 (**Encore une caractérisation des nilpotents**). *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il est semblable à l'endomorphisme $2u$.*

Proof. **Exercice 8** du TD. □

Pour finir cette section, on donne quelques conséquences sur la topologie des classes de similitudes d'endomorphismes nilpotents, dans les cas $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$ (pour avoir une topologie agréable...)

Pour le reste de cette section, on suppose $k = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour faciliter la compréhension, nous allons tout formuler en termes de matrices, cela revient au même puisque le choix d'une base de E induit un homéomorphisme $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{O}_M$ la classe de similitude de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathcal{O}_M = \{PMP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}.$$

Le théorème principal ici est la description de l'adhérence des orbites nilpotentes :

Théorème 2.25 (**Adhérence des orbites nilpotentes**). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'adhérence de la classe de similitude de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est*

$$\overline{\mathcal{O}_M} = \bigsqcup_{Y(M) \leqslant Y(N)} \mathcal{O}_N = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid N \text{ nilpotente, avec } Y(M) \leqslant Y(N)\}$$

La preuve de ce théorème difficile requiert plusieurs étapes intermédiaires. Premièrement, l'égalité entre le deuxième ensemble et le troisième est claire avec le Théorème de Jordan.

Ensuite, on procède par double inclusion. On rappelle le résultat suivant :

Proposition 2.26. *[H2G2, Corollaire I.4.5] Le rang d'une matrice est une application semi-continue inférieurement. Autrement dit, si $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrice de rang r qui converge vers une matrice N, alors le rang de N est inférieur à r.*

Corollaire 2.27. *La dimension du noyau d'une matrice est une application semi-continue supérieurement. Autrement dit, si $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrice qui converge vers une matrice N, et si* $\dim \operatorname{Ker} M_n$ *est constant égal à p, alors* $\dim \operatorname{Ker} N \geqslant p$.

Proof. Par le théorème du rang, la dimension du noyau d'une matrice plus son rang est constant égal à n. Le résultat découle alors immédiatement de la semi-continuité inférieure du rang. □

Soit maintenant un élément N de $\overline{\mathcal{O}_M}$. Il existe $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{O}_M$ qui converge vers N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par continuité du produit, pour tout $i \geqslant 1$, la suite des (M_m^i) converge vers N^i (en particulier, N est nilpotente). Par semi-continuité supérieure du rang, on trouve que

$$\forall i \geqslant 1, \dim \operatorname{Ker}(M^i) = \dim \operatorname{Ker}(M_n^i) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(N^i).$$

autrement dit, on a $Y(N) \geqslant Y(M)$, donc $N \in \mathcal{O}_N$ appartient à l'ensemble voulu.

Réciproquement, il suffit de montrer que toute matrice N telle que $Y(N) \geqslant Y(M)$ se trouve dans l'adhérence de $\mathcal{O}_M$, puisque la réunion des telles matrices est bien le troisième ensemble considéré. Soit donc N une matrice nilpotente telle que $Y(N) \geqslant Y(M)$.

<u>Supposons d'abord que $Y(N) \geqslant_{el} Y(M)$.</u> Si le tableau de Young de $Y(N)$ contient une ligne de plus que celui de $Y(M)$, alors la première ligne du tableau de $Y(N)$ contient une seule case, et la deuxième ligne du tableau de $Y(N)$ contient une case de moins que la première ligne du tableau de $Y(M)$. En notant $Y(M)^* = (Y_r, \dots, Y_1)$, on a $Y(N)^* = (Y_r, \dots, Y_1 - 1, 1)$. Par le théorème de Jordan, M est semblable à la matrice de Jordan $\operatorname{diag}(J_{Y_1}, \dots, J_{Y_r})$.

Considérons la matrice K_m de taille $r \times r$ et donnée par

$$K_m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice K_m est presque un bloc de Jordan J_r, mais on a remplacé le premier 1 dans la surdiagonale par un $1/m$. Le calcul du noyau donne $\mathcal{O}_{K_m} = \mathcal{O}_{J_r}$, et la suite K_m converge vers la matrice de Jordan $\operatorname{diag}(J_1, J_{r-1})$.

Maintenant, comme J_{Y_1} est semblable à la matrice K_m (pour $r = Y_1$), la suite

$$M_m := \operatorname{diag}(K_m, J_{Y_2}, \dots, J_{Y_r})$$

est une suite de $\mathcal{O}_M$, qui converge vers $N' := \operatorname{diag}(J_1, J_{Y_1}, \dots, J_{Y_r})$. Comme cette dernière matrice est semblable à N (encore par le théorème de Jordan), il existe une matrice inversible P telle que $PN'P^{-1} = N$. Par continuité du produit, la suite PM_mP^{-1} (qui est bien dans $\mathcal{O}_M$) converge vers N, et donc $N \in \overline{\mathcal{O}_M}$.

On peut donc supposer que $Y(N)$ et $Y(M)$ ont le même nombre de lignes.
Supposons que ce nombre de lignes est égal à 2. Les lignes de $Y(N)$ ont longueurs respectives $p < q$ et celles de $Y(M)$ ont longueurs $p-1, q+1$. On considère la suite

$$M_m := \operatorname{diag}(J_p, J_q) + \frac{1}{m} E_{n,p}$$

où $E_{p,n}$ est la matrice dont le seul coefficient non nul est un 1 en position (n, p). Par exemple, pour $p = 2, q = 3$ et $n = 5$, on a

$$M_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\operatorname{Ker} M_m$ est clairement de dimension 2, la première colonne du diagramme de Young de $Y(M_m)$ est de longueur 2, et ce diagramme contient donc deux lignes. Ensuite, on a $M_m^{q+1}.e_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc $M_m^{q+1} = 0$, le diagramme de $Y(M_m)$ a donc au plus $q+1$ colonnes et $M_m^q.e_p = \frac{1}{m} M_m^{q-1}.e_n + M_m^{q-1} e_{p-1} = \frac{1}{m} e_{p+1} \neq 0$. Donc $M_m^q \neq 0$ et le diagramme de $Y(M_m)$ a donc au moins $q+1$ colonnes. La première ligne du diagramme de $Y(M_m)$ (dont la longueur est la même que celle du diagramme) est donc de longueur $q+1$, la première est donc de longueur $p-1$ (la somme des deux doit valoir n). On a donc $M_m \in \mathcal{O}_M$ par le théorème de Jordan. Comme on a clairement que M_m converge vers $\operatorname{diag}(J_p, J_q)$ qui est semblable à N, on obtient à nouveau que N se trouve dans l'adhérence de $\mathcal{O}_M$ comme annoncé.

Si $Y(N)$ et $Y(M)$ ont tous les deux plus de 2 colonnes, alors l'hypothèse $Y(N) \geqslant_{el} Y(M)$ force toutes les lignes sauf deux du diagramme de $Y(M)$ à rester inchangées pour obtenir celui de $Y(N)$. On construit alors la même suite M_m que précédemment, en ajoutant éventuellement des blocs de Jordan constantes correspondant aux lignes inchangées du diagramme.

On a donc obtenu que $N \in \overline{\mathcal{O}_M}$ si $Y(N) \geqslant_{el} Y(M)$.

Pour le cas général où $Y(N) \geqslant Y(M)$, il existe par la Proposition 2.15 une suite $Y_0, \ldots, Y_r$ telle que $Y_0 = Y(M)$, $Y_r = Y(N)$ et $Y_i \leqslant_{el} Y_{i+1}$ pour $i \in [\![0, r-1]\!]$. En notant M_i une matrice nilpotente telle que $Y(M_i) = Y_i$, on a $\mathcal{O}_{M_{i+1}} \subset \overline{\mathcal{O}_{M_i}}$ pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$. Par une récurrence immédiate, on a $\mathcal{O}_N = \mathcal{O}_{M_r} \subset \overline{\mathcal{O}_{M_0}} = \overline{\mathcal{O}_M}$, ce qui termine la preuve.

De ce théorème sur les adhérences de classes de similitudes, on déduite relativement facilement quelles sont les classes ouvertes et les classes fermées.

Corollaire 2.28. *Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Parmi les classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, seule la classe de la matrice nulle est fermée dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. Seule la classe de similitude du bloc de Jordan J_n est ouverte dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.*

Proof. La partition associée à la matrice nulle est (n), qui est clairement l'élément maximal de l'ensemble des partitions de n. Par le théorème précédent, on a alors $\overline{\mathcal{O}_0} = \mathcal{O}_0$ est fermée. Ceci dit, cela découle aussi facilement de $\mathcal{O}_0 = \{0\}$...
Ensuite, la partition associée au bloc de Jordan J_n est $(1, \ldots, 1)$, qui est clairement l'élément minimal de l'ensemble des partitions de n. Le complémentaire de $\mathcal{O}_{J_n}$ dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est alors donné par

$$\bigsqcup_{Y(N) > (1,\ldots,1)} \mathcal{O}_N = \bigcup_{Y(N) > (1,\ldots,1)} \overline{\mathcal{O}_N}$$

qui est un fermé comme union finie de fermés.

Soit maintenant une matrice nilpotente M avec $Y(M)$ différent de (n) et de $(1, \ldots, 1)$. Comme $Y(M)$ est non maximal, l'adhérence de $\mathcal{O}_M$ contient des éléments qui ne sont pas dans $\mathcal{O}_M$, donc $\mathcal{O}_M$ n'est pas fermé. Ensuite, le complémentaire de $\mathcal{O}_M$ est donné par

$$\bigsqcup_{Y(N) \neq Y(M)} \mathcal{O}_N,$$

l'adhérence de cet ensemble contient $\mathcal{O}_M$ puisque $Y(M)$ n'est pas minimal, donc le complémentaire de $\mathcal{O}_M$ n'est pas fermé et $\mathcal{O}_M$ n'est pas ouverte. □

Corollaire 2.29 (Caractérisation topologique des endomorphismes nilpotents). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si l'adhérence de $\mathcal{O}_M$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient la matrice nulle.*

Proof. **Exercice 9** du TD. □

3 Réduction de Jordan dans le cas général

La réduction des endomorphismes nilpotents est la pierre principale dans la réduction de Jordan. Le reste du travail dans le cas général consiste à se ramener au cas d'un endomorphisme nilpotent. En pratique, ceci est effectué en utilisant les sous-espaces caractéristiques.

3.1 Sous-espaces stables d'un endomorphisme

On revient dans le cas général où u n'est plus forcément un endomorphisme nilpotent. Un sous-espace $F \subset E$ est dit *stable par u* (ou u-stable) si on a $u(F) \subset F$. On peut alors définir la *restriction* de u à F :

$$u_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$$

Lemme 3.1. *Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont tous les deux u stables. En particulier, pour tout $P \in k[X]$, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont u-stables.*

Proof. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$ qui est donc u-stable. Ensuite, soit $v(x) \in \operatorname{Im} V$, on a $u(v(x)) = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$ par définition. La seconde assertion provient du fait que u commute avec tous les éléments de $k[u]$. □

Si $F \subset E$ est un sous-espace u-stable, et si G est un supplémentaire de F dans E, alors la décomposition $F \oplus G = E$ permet d'écrire la matrice de u comme une matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

où X est la matrice de $u_{|F}$. De plus, si G est également u-stable, alors $Y = 0$ et on a une matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

où X est la matrice de $u_{|F}$ et Z est celle de $u_{|G}$.

On suppose désormais que χ_u est scindé sur k, notons

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

Définition 3.2 (Sous-espace caractéristique). Soit λ une valeur propre de u, le *sous-espace caractéristique* de u pour la valeur propre λ est

$$N_\lambda := \operatorname{Ker}(u - \lambda)^\alpha,$$

où α est la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans χ_u.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, et par le Lemme des noyaux, on obtient que E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de u:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{\lambda_i}.$$

Comme cette décomposition est une décomposition en espaces u-stables d'après le Lemme 3.1, on peut écrire la matrice de u dans une base adaptée sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{|N_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{|N_{\lambda_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_{|N_{\lambda_p}} \end{pmatrix}$$

Si on parvient à trigonaliser les $u_{|N_{\lambda_i}}$, alors l'écriture ci-dessus nous donnera une trigonalisation de u.

3.2 Trigonalisation sur les sous-espaces caractéristiques

Ici, on fixe λ une valeur propre de u, et α la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans χ_u.

Sur le sous-espace caractéristique N_λ, on a (par définition) que $u_{|N_\lambda}$ est annulé par le polynôme $(X - \lambda)^\alpha$. **En d'autres termes, $u_{|N_\lambda} - \lambda$ est nilpotent d'indice au plus α.**

D'après le Théorème 2.23, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de N_λ dans laquelle $u_{|N_\lambda} - \lambda$ s'écrit comme une matrice de Jordan $\operatorname{diag}(J_{n_1}, \dots, J_{n_p})$. En ajoutant $\lambda I_{\dim N_\lambda}$, on obtient alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(u_{|N_\lambda}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

En suivant la Notation 2.18, on peut aussi écrire cette matrice $J_{Y(\lambda)^*}(\lambda)$, où $Y(\lambda)$ est la partition de $\dim N_\lambda$ associée à l'endomorphisme $u_{|N_\lambda}$.

3.3 Le théorème de réduction de Jordan

Théorème 3.3 (Jordan). *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{diag}(J_{Y(\lambda_1)^*}(\lambda_1), \dots, J_{Y(\lambda_p)^*}(\lambda_p)).$$

où $Y(\lambda_i)$ désigne la partition associée à l'endomorphisme nilpotent $u_{|N_{\lambda_i}}$. De plus, cette décomposition est unique à permutation des facteurs près.

En particulier, on a trigonalisé tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, ce qui termine la preuve du théorème 1.8.

Bien-sûr, l'hypothèse de scindage du polynôme caractéristique peut être gérée en remplaçant k par une bonne extension L (par exemple, une clôture algébrique ?).

Exemple 3.4. Considérons dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique $(X^2+1)^2$ n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{Q}(i)$, on a $(X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$. Comme ce polynôme est scindé, on peut trigonaliser M. On calcule

$$N_i = \mathrm{Ker}(M - iI_4)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2i \\ -2i & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2i & -3 & 4i \\ 0 & 1 & -2i & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Comme N_i est de dimension 2, la partition $Y(i)$ associée à $(M_{|N_i} - iI_2)$ est égale à (2) ou à $(1,1)$, suivant si $M_{|N_i} - iI_2$ est nul ou non, comme

$$(M - iI_4).\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

On obtient que $Y(i) = (1,1)$. De même, on trouve $Y(-i) = (1,1)$, et la réduite de Jordan de M est alors donnée par

$$\mathrm{diag}(J_{(1,1)^*}(i), J_{(1,1)^*}(-i)) = \mathrm{diag}(J_{(2)}(i), J_{(2)}(-i)) = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 du TD.

4 Quelques applications

Nous avons vu que la réduction de Jordan fonctionne quand on considère un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Quand ce n'est pas le cas, il faut passer à une extension de k dans lequel le polynôme considéré est scindé. Cela semble limiter l'usage du Théorème 3.3. Cependant, le résultat suivant lui rend toute son utilité :

Proposition 4.1. *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(k)$, et soit L une extension de k. Si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(L)$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(k)$.*

Grace à cette proposition, on peut effectuer notre travail dans une extension convenable, puis redescendre dans le corps de départ pour obtenir les résultats qui nous intéressent.

Proposition 4.2. *Toute matrice est semblable à sa transposée.*

Proof. **Exercice 11** du TD. □

La Proposition 4.1 est vraie quels que soient k et L, mais la preuve en toute généralité utilise les invariants de similitudes (voir [OA, Section 6.5.1]). On peut néanmoins en donner une jolie preuve plus élémentaire dans le cas $k = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$:

Proposition 4.3. *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Proof. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PMP^{-1} = N$, on décompose P en partie réelle et imaginaire $P = U + iV$ avec $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $UA = BU$ et $VA = BV$. Si U ou V est inversible c'est gagné, mais elles ne sont pas inversibles en général et il faut ruser.
On sait qu'il existe un $t \in \mathbb{C}$ tel que $U + tV$ est inversible (prendre $t = i$). Autrement dit, le polynôme $P(t) := \det(U + tV)$ est tel que $P(i) \neq 0$ et il n'est donc pas identiquement nul. Sa restriction à $\mathbb{R}$ est donc non identiquement nulle et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $U + tV$ est inversible. Comme on a $(U + tV)A = B(U + tV)$, on a bien que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Proposition 4.4 (**Critère de cotrigonalisabilité**)**.** *[Gou09, Théorème 4.5] Supposons que u et v sont deux endomorphismes trigonalisables et qui commutent entre eux, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont toutes deux triangulaires (base de* cotrigonalisation*).*

Proposition 4.5. *On pose $D_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(k)$.*
- *Si $k = \mathbb{C}$, alors $D_n(k)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(k)$.*
- *Si $k = \mathbb{R}$, alors l'adhérence de $D_n(k)$ dans $\mathcal{M}_n(k)$ est l'ensemble des matrices réelles trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Proof. **Exercice 12** du TD. □

4.1 Exponentielle de matrices

Les dernières applications de la décomposition de Jordan que nous présentons se trouvent du côté des exponentielles de matrices. Là encore, on privilégie le point de vue matriciel pour la lisibilité.

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit J la réduite de Jordan de M, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $PMP^{-1} = J$. En séparant J selon sa partie diagonale et surdiagonale, on a une décomposition $J = D + N$, où D est diagonale et N est nilpotente. De plus, on vérifie que $DN = ND$. La décomposition $M = P^{-1}DP + P^{-1}NP$ est un exemple de *décomposition de Dunford* de M, mais il n'est pas clair dans ce point de vue que $P^{-1}NP$ et $P^{-1}DP$ s'expriment comme des polynômes en M...

On a alors
$$\exp(J) = \exp(D)\exp(N).$$
L'exponentielle de D est facile à calculer, celle de N également : comme N est nilpotente, la somme qui définit $\exp(N)$ est en fait une somme finie. On calcule ensuite
$$\exp(M) = P^{-1}\exp(J)P = P^{-1}\exp(D)\exp(N)P.$$

Mieux encore que de calculer l'exponentielle des matrices en utilisant la décomposition de Jordan, on peut montrer que l'exponentielle de matrices est surjective quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en utilisant la notion de matrice unipotente.

Définition 4.6 (**Matrice unipotente**)**.** Une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *unipotente* si $U - I_n$ est nilpotente. On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathbb{K}$.

En reprenant le Lemme 2.2, on obtient le résultat suivant :

Lemme 4.7. *Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre*
(i) U est unipotente.
(ii) $\chi_U = (X-1)^n$.
(iii) La seule valeur propre de u dans $\mathbb{C}$ est 1.

Remarque 4.8. On a définit les matrice nilpotentes comme celles ayant une puissance nulle. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les matrices unipotentes ne sont pas celles ayant une puissance égale à la matrice identité. En effet, une telle matrice est toujours diagonalisable (pourquoi ?), alors que la seule matrice unipotente diagonalisable est I_n.

Naturellement, on a un homéomorphisme $\mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ envoyant N sur $N + I_n$ (on rappelle que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices nilpotentes de tailles $n \times n$). Le résultat suivant donne un autre homéomorphisme via l'exponentielle des matrices

Proposition 4.9 (**There is another**).
L'exponentielle de matrices induit un homéomorphisme $\mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$*. La réciproque* $L : \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ *est donnée par*

$$L(U) := \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{(U - I_n)^m}{m}.$$

Proof. Tout part du développement limité du logarithme classique

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}.$$

Des manipulations parfaitement formelles font que cette série, composée avec celle de l'exponentielle, redonne l'identité.

Soit U une matrice unipotente, on peut écrire $U = I_n + N$ avec N nilpotente. Par définition, on a

$$L(U) = L(I_n + N) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{N^m}{m} = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{N^m}{m}.$$

la dernière égalité provient justement du fait que N est nilpotente, et donc que $N^n = 0$ par le Lemme 2.2.

Les manipulations formelles sur les séries font que $\exp(L(U)) = U$ et $L(\exp(N)) = N$. Comme l'application L est un polynôme, elle est continue et on a le résultat (celles et ceux qui ne sont pas convaincu.e.s par mon histoire de séries formelles pourront consulter la preuve plus directe faite dans [Gou09, Exercice 4.5]). □

De l'existence d'un logarithme sur les matrices unipotentes, on peut déduire (via la réduction de Jordan) que l'exponentielle des matrices complexes est surjective :

Théorème 4.10 (**Surjectivité de l'exponentielle**).
L'exponentielle de matrices $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est une application surjective.*

Proof. **Exercice 13** du TD. □

Références

[OA] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif agrégation*. H et K, 2005.

[H2G2] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométrie (Tome 1, ed. 1)*. Calvage et Mounet, 2013.

[Gou09] X. Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 2009.

[Gri90] J. Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès Éditions, Toulouse, 1990, pp. viii+440. ISBN: 2-85428-239-6.