Rappels et exercices sur le groupe linéaire II

Pour pouvoir traiter de topologie, on se restreint à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Groupes topologiques

Définition. Un ***groupe topologique*** est un groupe G muni d'une topologie, pour laquelle sont continues les applications produit et de passage à l'inverse :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & gh \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \iota : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est un groupe topologique, montrer que l'ensemble $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1 en forme un sous-groupe.

Exercice 2. Soient G un groupe topologique et g un élément de G. Montrer que les applications de translations à gauche et à droite

$$\begin{array}{rccc} L_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & gh \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} R_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & hg \end{array}$$

sont des homéomorphismes.

Exercice 3. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que l'application inverse ι induit une bijection de l'ensemble des fermés qui contiennent H. En déduire que l'adhérence $\overline{H}$ de H dans G est stable par inverse.
2. Montrer que $\overline{H}$ est stable par produit (*Indication : On rappelle que $x \in \overline{H}$ si et seulement si tout voisinage de x dans G intersecte H non trivialement*).
3. Déduire que l'adhérence $\overline{H}$ de H dans G est encore un sous-groupe de G.

Définition. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. On appelle ***action continue*** de G sur X une action $\alpha : G \times X \to X$ qui est une application continue.

On supposera dans la suite que G et X sont séparés. C'est par exemple le cas s'ils sont métriques.

Exercice 4. Soit $\alpha : G \times X \to X$ une action continue

1. Pour $x \in X$ on définit l'application $\alpha_x : G \to X$ par $g \mapsto \alpha(g,x) = g.x$. Montrer que pour tout x, α_x est continue.
2. Montrer que pour tout x, le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(x)$ de x dans G est fermé.
3. Soit $\mathcal{O} := \mathcal{O}_G(x)$ une G-orbite de X. Montrer que, pour tout y dans l'adhérence $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ et pour tout $g \in G$, $g.y \in \overline{\mathcal{O}}$. Autrement dit, l'adhérence d'une orbite est une réunion d'orbites.

Dans le cas classique d'une action d'un groupe G sur un ensemble X. On sait que, pour $x \in X$, on a une bijection (un isomorphisme de G-ensembles) entre $G/\mathrm{Stab}_G(x)$ et l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$ de x dans X. Dans le cas d'une action continue, cette bijection est un homéomorphisme sous certaines hypothèses.

Théorème (H2G2 tome 1 ed.1, Théorème II.3.4.3)**.** Soit G un groupe topologique agissant sur un espace X, et soit $x \in X$. On suppose que G est localement compact et dénombrable à l'infini (=union dénombrable de compact), et que $\mathcal{O}_G(x)$ est localement compact. Alors, pour $x \in X$, la bijection naturelle $G/\operatorname{Stab}_G(x) \to \mathcal{O}_G(x)$ est un homéomorphisme.

Comme les boules fermées sont compactes en dimension finie, l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est localement compact et dénombrable à l'infini. Il en va donc de même de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, auquel on pourra essayer d'appliquer le théorème ci-dessus.

Sous de plus fortes hypothèses sur G, on peut se passer d'hypothèses sur X.

Proposition. Soit G un groupe topologique agissant sur un espace X, et soit $x \in X$. Si G est compact, alors la bijection naturelle $G/\operatorname{Stab}_G(x) \to \mathcal{O}_G(x)$ est un homéomorphisme.

Exercice 5. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On suppose que H et G/H sont des espaces connexes (G/H est muni de la topologie quotient). Soit $f : G \to \{0, 1\}$ une application continue.

1. Montrer que f est constante sur H. En déduire que f est constante sur toute classe à gauche gH modulo H.
2. Montrer qu'il existe une application $\overline{f} : G/H \to \{0, 1\}$ telle que $\overline{f}(gH) = f(g)$ pour $g \in H$. Montrer que $\overline{f}$ est continue. (*Indication : la projection canonique $\pi : G \to G/H$ est une application ouverte*).
3. En déduire que $\overline{f}$, puis f sont constantes. Conclure que G est connexe.

La conclusion de l'exercice précédent est vraie en remplaçant "connexe" par "compact". Mais la preuve est différente (cf [Mneimné-Testard, Chapitre 2 exercice 4]).

2 Groupes de matrices

Exercice 6. 1. Montrer que le déterminant est une application continue $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.

2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ forme un groupe topologique.
3. En considérant des matrices de la forme $A + \varepsilon B$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que l'application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \det(zA + (1 - z)B)$ est un polynôme non nul.
2. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ et pour tout $t \in [0, 1]$, la matrice $\gamma(t)A + (1 - \gamma(t))B$ est inversible. (*Indication : l'ensemble $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de point est connexe par arc*).
3. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.
4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe (on utilisera que $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe).

Définition. On a déjà vu la définition de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. On considérera aussi d'autres sous-groupes remarquables de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

Groupe orthogonal :	$\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A^{-1}\}$
Groupe unitaire :	$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\}$
Groupe spécial orthogonal :	$\mathrm{SO}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
Groupe spécial unitaire :	$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$

Exercice 8. 1. Montrer que l'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$ n'est pas borné. En déduire que $\mathrm{O}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ ne sont pas compact.

2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

3. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (*Indication : on pourra utiliser la réduction des matrices orthogonales*).

   Remarque : On peut montrer de même que $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est compact. Il est également connexe par arcs.

Exercice 9. On considère deux matrices A, B, on cherche à montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. On suppose A inversible. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. (*On pourra montrer que AB et BA sont conjuguées*)
2. On pose $\mathbb{K}_n[\lambda]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré au plus n. Montrer que l'application $A \mapsto \chi_A$ allant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}_n[\lambda]$ est continue.
3. En déduire que, pour tout couple de matrices A, B, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (*Indication : on utilisera la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*).
4. En déduire que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 10. (Densité des matrices diagonalisables dans les matrices trigonalisables)
On pose $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice $n \times n$ diagonalisables. On rappelle que $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit T une matrice triangulaire supérieure et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. Construire, pour tout $k > 0$ une matrice diagonale D_k dont les coefficients diagonaux sont inférieurs à 2^{-k} et telle que $T + D_k \in \mathcal{M}_n^{-\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$.
2. En déduire que toute matrice trigonalisable est limite de matrices de $\mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 11. (Cayley-Hamilton)

1. Soit D une matrice diagonale à valeurs propres distinctes. Montrer que $\chi_D(D) = 0$.
2. En déduire que, pour $A \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$, on a $\chi_A(A) = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'application $\mathbb{K}_n[\lambda] \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ envoyant P sur $P(A)$ est continue, en déduire que $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue (*Indication : on pourra utiliser la question 2 de l'exercice* **??**).
4. Conclure que $\chi_A(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

ALERTE : Cette preuve ne fonctionne en l'état que pour un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 12. (Connexité de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$)

1. On reprend les notations de la première feuille concernant les transvections. Montrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$
   Est dans la composante connexe par arcs de I_n dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que toute transvection est dans la composante connexe par arcs de l'identité dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.
4. Déduire de l'exercice précédent une nouvelle preuve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
5. On pose $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices à déterminant strictement positif (resp. strictement négatif). Montrer que l'on a une suite exacte courte
$$1 \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^* \to 1$$
   En déduire que les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ (*Indication : on pourra utiliser l'exercice* **??**).

Exercice 13. (Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes continu. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $f_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction coordonnée (i, j) de f.

1. Expliciter l'assertion "f est un morphisme de groupes" à l'aide des fonctions $f_{i,j}$.
2. Pour deux réels a, b, on définit $\int_a^b f(s)ds$ comme la matrice dont la coordonnée i, j est $\int_a^b f_{i,j}(s)ds$. Soit $\alpha > 0$. Vérifier que l'on a, pour tout réel t,
$$\left(\int_0^\alpha f(s)ds\right) f(t) = \int_t^{t+\alpha} f(s)ds$$
3. Montrer que, quand α tends vers 0, la valeur moyenne de f sur $[0, \alpha]$, i.e.
$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(s)ds$$
converge vers $f(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En déduire que pour α assez petit, la valeur moyenne de f sur $[0, \alpha]$ est une matrice inversible.
4. Montrer que, pour $\alpha > 0$, la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{\alpha}\int_t^{t+\alpha} f(s)ds$$
est dérivable en 0. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(t) = f'(0)f(t)$ pour tout réel t.
5. Conclure que $f(t) = \exp(tf'(0))$ pour tout réel t.
6. Réciproquement, montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ induit un sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tM)$.

3 Topologie de quelques actions classiques

Exercice 14. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ est continue. Quelles sont les orbites ? Expliciter les résultats de l'exercice **??** dans ce contexte.

Exercice 15. On considère $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. On pose $B \subset G$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans G.

1. Le groupe B est-il distingué dans G ?

On rappelle que G agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ continument et transitivement par
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.[x : y] := [ax + by : cx + dy]$$

2. Montrer que B est le stabilisateur de $[1 : 0]$ pour cette action. En déduire un homéomorphisme $G/B \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.
3. Décrire l'action de B sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Quelles sont les orbites ? Expliciter les résultats de l'exercice **??** dans ce contexte.
4. Que se passe-t-il si l'on remplace B par l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de G dans la question précédente ?

Exercice 16. (Théorème du rang) On pose $G_1 := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $G_2 = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $X = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $G_1 \times G_2$ agit continument sur X par
$$(g, h).M := gMh^{-1}.$$
On appelle cette action ***l'action par équivalence***. Deux matrices de X se trouvant dans la même orbite sont dites ***équivalentes***.

2. Soit $M \in X$. Montrer que pour toute matrice $N \in X$ équivalente à M, on a $\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(M)$.
3. Montrer que toute matrice $M \in X$ est équivalente à une unique matrice de la forme
$$M_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
avec $\mathrm{rg}(M) = k \leqslant m, n$. On pose $\mathcal{O}_k$ l'orbite de M_k.
4. Montrer que pour $k \leqslant k' \leqslant m, n$, la matrice M_k est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_{k'}$.
5. En déduire que
$$\forall k_0 \leqslant m, n, \quad \overline{\mathcal{O}_{k_0}} = \bigcup_{k \leqslant k_0} \mathcal{O}_k.$$
6. Montrer que $\mathcal{O}_0$ est la seule orbite fermée, et que $\mathcal{O}_{\min(m,n)}$ est la seule orbite ouverte. Si $m = n$, à quoi sont égales $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_{\min(m,n)}$.

On peut faire un travail comparable en considérant l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison [H2G2 tome 1 ed.1, Sections III.1 III.2 III.3]. Cette action traduit le changement de base et est un bon contexte pour formuler la réduction des endomorphismes. On a alors

Théorème. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\mathcal{O}_A$ la classe de similitude de A. On a
- A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathcal{O}_A$ est fermée.
- A est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans $\overline{\mathcal{O}_A}$.

Exercice 17. (Correspondance de Klein) On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}.$$
1. Montrer que E est de dimension 3. Montrer que $\det : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique.
2. Montrer que la famille
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est une base de E, orthogonale pour det. En déduire la signature de det comme forme quadratique sur E.
3. On considère le groupe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que G agit sur E par
$$\forall g \in G, M \in E,\ g.M := gMg^{-1}.$$
On note $\varphi : G \to \mathfrak{S}(E)$ le morphisme de groupe associé à cette action.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\pm I_2\}$.
5. Montrer que φ est en fait à valeurs dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(\det) \subset \mathrm{GL}(E)$. En déduire que φ est à valeurs dans la composante connexe $\mathrm{O}_0(\det)$ de Id_E dans $\mathrm{O}(\det)$.
6. On admet que la différentielle $d\varphi_{I_2}$ est une bijection. En déduire que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ contient un ouvert contenant Id_E, ainsi qu'un fermé contenant Id_E.
7. En déduire que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ est ouvert et fermé. En déduire que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{O}_0(\det)$.
8. En déduire un homéomorphisme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}_0(\det)$.

On peut montrer par ailleurs que $\mathrm{O}_0(\det)$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ ([H2G2 tome 1 ed.1, Proposition VI.A.2]), et ainsi déduire certaines propriétés topologiques de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

On peut montrer (cf. exercice **??**) que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie. L'espace tangent en l'identité $T_{I_2}\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ étant égal à E. L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur E est donc une affaire de groupe de Lie,

Corollaire (H2G2 tome 1 ed.1, Exercice IX.2.2)**.** [Perrin Théoreme 3.2] Avec le même type d'arguments, on obtient des homéomorphismes de groupes
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}),\ \mathrm{PSU}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}),\ \mathrm{PSO}_4(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})^2$$
On peut en déduire que $\mathrm{PSO}_4(\mathbb{R})$ est le seul $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R})$ non simple.

4 Groupes de Lie

On a étudié GL_n et ses sous-groupes comme des groupes topologiques, mais en fait il y a mieux : une structure de (sous-)variété. Comme pour les groupes topologiques, un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété différentielle pour laquelle le produit et le passage à l'inverse sont $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 18. ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ comme groupes de Lie)

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement. Quelles sont leurs dimensions ?
3. Quel est l'espace tangent en l'identité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? Même question pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$?
4. Montrer que le produit et le passage à l'inverse sont en fait des applications $\mathcal{C}^\infty$ dans GL_n.

Exercice 19. ($\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ comme groupe de Lie)
On rappelle que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la différentielle du déterminant en A est donnée par $H \mapsto \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H)$, où ${}^t\mathrm{com}(A)$ est la transposée de la comatrice de A.

1. Montrer que det est une submersion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^*$. En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? Quel est l'espace tangent $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(\exp(M)) = e^{\mathrm{tr}(M)}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe à un paramètre donné par une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est à valeur dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $M \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20. ($\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ comme groupes de Lie)
On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto {}^tMM$.

1. Montrer que f est à valeurs dans l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles d'ordre n.
2. Montrer que la différentielle de f en une matrice X_0 est donnée par $df_{X_0} : M \mapsto {}^tX_0M + {}^tMX_0$. En déduire que f restreinte à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une submersion.
3. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. En déduire que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est également une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que les espaces tangents à I_n dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont égaux. On note $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ cet espace.
5. Montrer que $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices antisymétriques.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe à un paramètre donné par une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est à valeur dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si $M \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

On termine par quelques autres résultats sur les groupes de Lie, pour la culture.

Théorème. (Von Neumann 1929, Cartan 1930, [Mneimné Testard, Section 3.4]) Tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un groupe de Lie.

Théorème (H2G2 tome 1 ed.1, Théorème IX.B.10)**.** Si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe fermé, l'espace tangent à G en l'identité est donné par

$$\mathfrak{g} = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tM) \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe fermé (ou plus généralement, un groupe de Lie). On pose $\mathfrak{g}$ l'espace tangent à G en l'identité.

Pour $g \in G$, la conjugaison par g fournit un automorphisme de groupe de Lie $\mathrm{Ad}_g : G \to G$. La différentielle de Ad_g en l'identité fournit une application linéaire $\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. On peut alors montrer que $\mathrm{ad} : g \mapsto \mathrm{ad}_g$ donne un morphisme de groupe $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Dans le cas où G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on montre facilement que l'on a

$$\forall g \in G, x \in \mathfrak{g},\ \mathrm{ad}_g(x) = gxg^{-1} \in \mathfrak{g}$$

Le morphisme ad est le morphisme que nous avons utilisé dans l'exercice **??** dans le cas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.