Rappels et exercices sur le groupe linéaire I

On fixe k un corps (commutatif), et E un k-espace vectoriel de dimension finie n. Par défaut la source c'est le Perrin.

1 Le groupe linéaire, définition

Définition. Le ***groupe linéaire*** $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des k-automorphismes linéaires de E. Le groupe linéaire de l'espace vectoriel k^n est noté $\mathrm{GL}_n(k)$, on l'identifie systématiquement au groupes des matrices carrées de taille n inversibles à coefficients dans k.

Exercice 1. Le choix d'une base $\mathcal{B}$ de E induit un isomorphisme de k-espaces vectoriel $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to k^n$.

1. Montrer que le choix d'une base $\mathcal{B}$ induit un isomorphisme $M_{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}_n(k)$. Comment appelle-t-on la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ pour $f \in \mathrm{GL}(E)$?
2. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, écrire $M_{\mathcal{B}'}(f)$ en fonction de $M_{\mathcal{B}}(f)$, de $\varphi_{\mathcal{B}}$ et $\varphi_{\mathcal{B}'}$.
3. Montrer que le morphisme $\det \circ M_{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(E) \to k^*$ ne dépend pas du choix d'une base $\mathcal{B}$. On notera également det ce nouveau morphisme (par abus de langage).

Définition. Le ***groupe spécial linéaire*** $\mathrm{SL}(E)$ est le noyau du morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \to k^*$. Le choix d'une base de E identifie $\mathrm{SL}(E)$ au groupe $\mathrm{SL}_n(k)$ des matrices de déterminant 1.

Exercice 2. On a une suite exacte courte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}(E) \xrightarrow{\det} k^* \longrightarrow 1$$

Autrement dit, on a $\mathrm{SL}(E) = \ker \det$ et $\mathrm{Im}(\det) = k^*$.

1. Montrer que le morphisme det admet une section : il existe un morphisme $\iota : k^* \to \mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout $\lambda \in k^*$, on ait $\det(\iota(\lambda)) = \lambda$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathrm{SL}(E) \rtimes k^*$.

Exercice 3. On considère $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q. Dénombrer les éléments de $\mathrm{GL}_n(k)$. En déduire le cardinal de $\mathrm{SL}_n(k)$.

2 Un système de générateurs

De la même manière que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions, des éléments ayant un nombre maximum de point fixe, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les transvections et dilatations, des éléments fixant des hyperplans.

On rappelle que les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires sur E (les éléments du dual E^*). On a d'ailleurs que deux formes linéaires f, f' ont le même noyau si et seulement si elles diffèrent par un scalaire : $\exists \lambda \in k$ tel que $f = \lambda f'$.

Exercice 4. Pour $\lambda \in k^*$, on définit

$$\delta(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'ordre de ces matrices (on fera attention à la caractéristique de k).

Exercice 5. (Dilatations) Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u \neq \mathrm{Id}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \notin \mathrm{SL}(E)$

(ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$

(iii) $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subset H$

(iv) Dans une base convenable, u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \delta(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$.

Si ces conditions sont remplies, on dira que u est une ***dilatation*** d'hyperplan H, de droite $D := \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et de rapport λ.

Exercice 6. (Transvections) Soit $f \in E^*$ de noyau H et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u \neq \mathrm{Id}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $u \in \mathrm{SL}(E)$

(2) u n'est pas diagonalisable

(3) $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset H$

(4) Il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que l'on ait

$$\forall x \in E, u(x) = x + f(x)a$$

(5) Dans une base convenable, u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

On pourra utiliser l'exercice précédent. Si ces conditions sont remplies, on dira que u est une ***transvection*** d'hyperplan H, de droite $D := \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 7. (Transvections 2)
D'après l'exercice précédent, on peut définir les transvections comme les endomorphismes de la forme

$$\tau(f, a) : x \mapsto x + f(x)a$$

avec $f \in E^*$ et $a \in \mathrm{Ker}\, f \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\tau(f, a) = \tau(f', a')$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^*$ tel que $f' = \lambda f$ et $a' = \lambda^{-1} a$.
2. Montrer que $\tau(f, a)\tau(f, b) = \tau(f, a + b)$. En déduire que $(\tau(f, a))^{-1} = \tau(f, -a)$.
3. Justifier que $\tau(f, a)$ induit un endomorphisme de l'espace quotient $E/\mathrm{Ker}\, f$. Quel est cet endomorphisme ?
4. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$, montrer que $u\tau(f, a)u^{-1} = \tau(fu^{-1}, u(a))$. Quelles sont la droites et l'hyperplan de cette transvection ?

Théorème (Perrin, Théorème 2.11 et Corollaire 2.12)**.** Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$. Les transvections et dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$.

3 Sous-groupes remarquables

3.1 Centres, groupes projectifs

On décrit le centre du groupe linéaire et du groupe spécial linéaire. On en déduit la définition des groupes projectifs.

Exercice 8. (Centres)

1. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que si u laisse invariante toutes les droites vectorielles de E, alors u est une homothétie (on distinguera les cas de deux vecteurs colinéaires et de deux vecteurs non colinéaires).
2. Montrer que si u commute avec toutes les transvections, alors u est une homothétie (on pourra utiliser l'exercice 7).
3. En déduire que le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est $Z := \{\lambda I_n \mid \lambda \in k^*\}$, et que le centre de $\mathrm{SL}(E)$ est $Z \cap \mathrm{SL}(E) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mu_n(k)\}$. (L'ensemble $\mu_n(k)$ désignant les racines n-èmes de l'unité dans k).

Définition. Le quotient de $\mathrm{GL}(E)$ par son centre est appelé le ***groupe projectif linéaire*** et est noté $\mathrm{PGL}(E)$. De même le quotient de $\mathrm{SL}(E)$ par son centre est noté $\mathrm{PSL}(E)$. On note $\mathrm{PGL}_n(k)$ et $\mathrm{PSL}_n(k)$ les quotients des groupes matriciels correspondants.

Exercice 9. 1. Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini. Calculer l'ordre de $\mathrm{PGL}_n(k)$ et de $\mathrm{PSL}_n(k)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 10.

1. On définit $e_n : k^* \to k^*$ par $\lambda \mapsto \lambda^n$. Montrer que e_n est un morphisme de groupes.
2. Quel est le noyau de e_n ? On pose $k^{*n} := \mathrm{Im}\, e_n$.
3. Pour $\lambda \in k^*$, on pose $h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$ l'homothétie de rapport λ. Montrer que $\det(h_\lambda) = \lambda^n$. En déduire que l'on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathrm{PSL}(E) \longrightarrow \mathrm{PGL}(E) \xrightarrow{\overline{\det}} k^*/k^{*n} \longrightarrow 1$$

Théorème (Perrin, Théorème 4.1)**.** Le groupe $\mathrm{PSL}_n(k)$ est simple, sauf pour $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$

Nous verrons qui sont les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ dans l'exercice 16.

3.2 Groupe dérivé

On rappelle que le ***commutateur*** de deux éléments g, h d'un groupe G est défini par $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Le ***groupe dérivé*** d'un groupe G est le sous-groupe $D(G)$ engendré par les commutateurs.

Exercice 11. Soit φ un automorphisme du groupe G. Montrer que $D(G)$ est invariant (globalement) par φ (on dit que $D(G)$ est ***caractéristique***). En déduire que $D(G)$ est distingué dans G.

Exercice 12. (Conjugaison et transvections)

1. Montrer que deux transvections quelconques sont toujours conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$.
2. On suppose $n \geqslant 3$. Soient v une transvection, et $\lambda \in k^*$. Montrer qu'il existe $s \in \mathrm{GL}(E)$ de déterminant λ^{-1} et avec $sv = vs$ (*Indication : raisonner avec les matrices*).
3. En déduire que si $n \geqslant 3$, deux transvections sont toujours conjuguées dans $\mathrm{SL}(E)$. (*Ce dernier résultat est faux quand* $n = 2$).

Exercice 13. On suppose $n \geqslant 3$.

1. Montrer que le commutateur de deux éléments de $\mathrm{GL}(E)$ est dans $\mathrm{SL}(E)$. En déduire que $D(\mathrm{GL}(E)) \subset \mathrm{SL}(E)$.
2. On suppose que $D(\mathrm{GL}(E))$ contient une transvection. Montrer qu'alors $D(\mathrm{GL}(E))$ contient toutes les transvections. En déduire que $\mathrm{SL}(E) = D(\mathrm{GL}(E))$.

Il suffit donc de montrer que une certaine transvection peut s'écrire comme un commutateur.

3. On suppose $n \geqslant 3$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2$. (les autres cas sont dans [Perrin])
   a) Soit u une transvection, montrer que u^2 est une transvection.
   b) En déduire qu'il existe $s \in \mathrm{SL}(E)$ telle que $u = sus^{-1}u^{-1}$.
   c) Conclure que $D(\mathrm{GL}(E)) = \mathrm{SL}(E)$ et $D(\mathrm{SL}(E)) = \mathrm{SL}(E)$ dans ce cas.

En général, on a

Théorème (Perrin, Théorème 3.1)**.** On a $D(\mathrm{GL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k)$ sauf dans le cas $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2))$. On a $D(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k)$ sauf dans les cas $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2))$ et $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$.

4 Action de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'espace projectif

On rappelle que le groupe k^* agit sur $E \setminus \{0\}$ par multiplication. Les orbites sous cette action s'identifient aux droites vectorielles de E. On pose $\mathbb{P}(E)$ l'espace des orbites, c'est ***l'espace projectif*** associé à E. On note également $\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1})$.

Exercice 14.

1. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ agit sur $E \setminus \{0\}$. Montrer que cette action est fidèle et transitive.
2. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur E préserve la colinéarité, en déduire une action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$.
3. Montrer que $Z(\mathrm{GL}(E))$ est le noyau de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$.
4. En déduire une action fidèle de $\mathrm{PGL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$.

Notons que tout ceci reste vrai en remplaçant $\mathrm{GL}(E)$ par $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{PGL}(E)$ par $\mathrm{PSL}(E)$.

Un vecteur $(x_0, \ldots, x_n)$ dans k^{n+1} induit un élément de $\mathbb{P}^n(k)$, que l'on note $[x_0 : \ldots : x_n]$, ce sont les ***coordonnées homogènes***. Par définition on a

$$\forall \lambda \in k^*,\ [x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n].$$

Exercice 15. ($\mathrm{PGL}_2(k)$ ou les homographies)

1. On considère $\mathbb{P}^1(k)$ la ***droite projective*** sur k. Soit $\widehat{k} := k \sqcup \{\infty\}$ l'ensemble obtenu en adjoignant à k un "point à l'infini". Montrer que l'application $\psi : k^2 \setminus \{0\} \to \widehat{k}$ définie par

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ \infty & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

   induit une bijection entre $\mathbb{P}^1(k)$ et $\widehat{k}$, de bijection réciproque φ, donnée par

$$\begin{cases} \varphi(\lambda) = [\lambda : 1] & \text{pour } \lambda \in k, \\ \varphi(\infty) = [1 : 0]. \end{cases}$$

   On identifie dans la suite $\widehat{k}$ et $\mathbb{P}^1(k)$ par ces bijections.
2. On rappelle que $\mathrm{PGL}_2(k)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^1(k)$. Soit

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k).$$

   Calculer la bijection de $\widehat{k}$ induite par l'action de u sur $\mathbb{P}^1(k)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\det u$ pour que son image $\overline{u}$ dans $\mathrm{PGL}_2(k)$ soit dans $\mathrm{PSL}_2(k)$.

Exercice 16. (Isomorphismes exceptionnels) On pourra utiliser les cardinaux de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

1. Calculer le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. Déduire des exercices précédents un morphisme injectif $\varphi : \mathrm{PGL}_2(F_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$.
3. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$. En déduire $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2))$ et $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2))$.
4. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$. En déduire $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3))$.
5. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
6. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$ (*on utilisera le fait que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$*).

5 Quelques sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(k)$

Exercice 17. (Matrices de permutations, [OA, 4.89]) On considère $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de k^n.

1. Montrer que l'on obtient une action de $\mathfrak{S}_n$ sur k^n en posant $\sigma.e_i := e_{\sigma(i)}$, et étendu par linéarité. On pose u_σ l'endomorphisme de k^n associé à l'action de σ.
2. En déduire un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(k)$. On appelle ***matrices de permutation*** les images des éléments de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(k)$. On pose P_σ la matrice associée à une permutation σ.
3. Quelle est la matrice P_τ, si $\tau = (i\ j)$ est une transposition ?
4. Montrer que l'association $\sigma \mapsto P_\sigma$ est injective.
5. Montrer que si σ et τ sont des permutations conjuguées, alors P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$. (*La réciproque est vraie ! C'est un théorème de Brauer*).
6. Quel est le déterminant d'une matrice de transposition (*penser à l'alternance du déterminant*) ?En déduire que le déterminant d'une matrice de permutation est égal à la signature de la permutation associée.

Exercice 18. ("Invariance du domaine") Soient k et L deux corps de caractéristique non 2.

1. Soit G un groupe fini dont tous les éléments (non triviaux) sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien.
2. En déduire que si $G \subset \mathrm{GL}_n(k)$ est un sous-groupe dont tous les éléments (non triviaux) sont d'ordre 2, alors $|G| \leqslant 2^n$ (*Indication : codiagonaliser*).
3. On suppose qu'il existe un morphisme injectif $\mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{GL}_m(L)$, montrer que $n \leqslant m$.
4. En déduire que $\mathrm{GL}_n(k) \simeq \mathrm{GL}_m(L)$ implique $n = m$.
5. Existe-t-il un isomorphisme entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$? Entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$?

Exercice 19. (Ceci n'est pas un exercice sur les représentations)

1. Montrer que tout groupe d'ordre n admet une représentation fidèle dans $\mathrm{GL}_n(k)$, quel que soit le corps k.
2. Donner les matrices de la représentation ainsi construite du groupe diédral D_4 (groupe des symétries du carré).

Exercice 20. (Un groupe de réflexions) On se place dans $\mathrm{GL}_n(k)$, et on rappelle que $\mu_m(k)$ désigne les racines m-èmes de l'unité dans k. On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(k)$ est ***monomiale*** si elle a au plus (donc exactement) un coefficient non nul par ligne et par colonne.

1. Montrer que les matrices de permutations sont des matrices monomiales.

On définit $G(m,1,n)$ comme l'ensemble des matrices monomiales dans $\mathrm{GL}_n(k)$, et dont les coefficients non nuls sont dans $\mu_m(k)$.

2. Montrer que toute matrice $M \in G(m,1,n)$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = P_\sigma D$, où P_σ est une matrice de permutation, et D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux se trouvent dans $\mu_m(k)$.
3. Soit D une matrice diagonale, et P_σ une matrice de permutation. Montrer que $P_\sigma^{-1} D P_\sigma$ est diagonale, et donner ses coefficients. En déduire que $G(m,1,n)$ forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$.
4. Montrer que l'application π envoyant un élément de $G(m,1,n)$ sur le produit de ses éléments non nuls dans $\mu_m(k)$ est un morphisme de groupe (attention : ce n'est pas le déterminant).

On définit alors $G(m,m,n)$ comme le noyau du morphisme ci-dessus. On considère à présent $k = \mathbb{C}$, et on pose $\zeta_m := \exp(2i\pi/m)$.

5. Montrer que $G(m,m,2)$ est d'ordre $2m$.
6. On pose
$$s := \begin{pmatrix} 0 & \zeta_m \\ \zeta_m^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \ r := \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que s et r engendrent $G(m,m,2)$ et que l'on a $s^2 = I_2,\ r^m = I_2,\ sr = r^{-1}s$.
7. En déduire que $G(m,m,2)$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2m$.