Rappels et exercices sur la réduction des endomorphismes. Réduction de Jordan

Par défaut, on fixe k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera χ_u le polynôme caractéristique de u, et π_u son polynôme minimal.

† *Polynômes d'endomorphismes*

Exercice 1.
1. $(i) \Rightarrow (ii)$ est clair puisque π_u est un polynôme annulateur de u. Réciproquement, si $P \in k[X]$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule u, alors π_u qui divise P est lui aussi scindé à racines simples.

2. Supposons que u est diagonalisable. Soit une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle on a

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_3, \ldots, \lambda_r)$$

avec les λ_j distincts deux à deux. On voit que M est annulée par le polynôme $P(X) := (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$, qui est scindé à racines simples. Comme l'ensemble des polynômes annulateurs de M est égal à l'ensemble des polynômes annulateurs de u, on trouve que u annule un polynôme scindé à racines simples et donc que π_u est scindé à racines simples d'après la question 1.

3. On écrit $\pi_u(X) := \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)$ avec les α_i distincts deux à deux. Par le lemme des noyaux, on a

$$E = \mathrm{Ker}(\pi_u(U)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(u - \alpha_i \,\mathrm{Id})$$

Comme les $\mathrm{Ker}(u - \alpha_i \,\mathrm{Id})$ sont les espaces propres de u, on trouve bien que E est la somme directe des espaces propres de l'endomorphisme u, qui est donc diagonalisable.

Exercice 2.
$(i) \Leftrightarrow (ii)$ On sait que les facteurs irréductibles de χ_u et de π_u sont égaux, les premiers sont donc tous de degré 1 si et seulement si les second sont tous de degré 1. Autrement dit, χ_u est scindé si et seulement si π_u l'est.
Ici encore, $(i) \Rightarrow (iii)$ est immédiat puisque π_u est un polynôme annulateur de u. Enfin, si u annule un polynôme scindé, alors ce polynôme est un multiple de π_u, qui est donc lui aussi scindé.

Exercice 3.
1.Comme tout élément de F est une racine de $X^q - X$, on a que

$$X^q - X = \prod_{\alpha \in F} (X - \alpha)$$

est scindé à racines simples.
2. Supposons d'abord que M est diagonalisable. Pour un certain $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, on a

$$PMP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

(avec les λ_i non nécessairement tous distincts). On a alors

$$(PMP^{-1})^q - PMP^{-1} = P(M^q - M)P^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^q - \lambda_1, \lambda_2^q - \lambda_2, \ldots, \lambda_n^q - \lambda_n)$$

Comme tous les éléments de F annulent $X^q - X$, on en déduit que $P(M^q - M)P^{-1} = 0$ et que $M^q - M = 0$.
Réciproquement, si $M^q - M = 0$, alors M annule le polynôme $X^q - X$, qui est scindé à racines simples. Ceci implique directement que M est diagonalisable.

Exercice 4.
1. Comme u^2 est diagonalisable, on sait que le polynôme minimal de u^2 est scindé à racines simples, notons alors

$$\pi_{u^2}(X) := \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i),$$

avec les α_i distincts deux à deux. Comme $\pi_{u^2}(u^2) = 0$, on en déduit que u annule le polynôme

$$\pi_{u^2}(X^2) = \prod_{i=1}^{r}(X^2 - \alpha_i)$$

Pour un α_i non nul, on a $(X^2 - \alpha_i) = (X - r_i)(X + r_i)$ avec r_i une racine de α_i dans k (comme ce dernier est algébriquement clos, on peut prendre une telle racine). Comme $u \in \mathrm{GL}(E)$, on a $u^2 \in \mathrm{GL}(E)$, et donc u^2 n'admet pas 0 comme valeur propre, les α_i sont donc tous non nuls et on a

$$\pi_{u^2}(X^2) = \prod_{i=1}^{r}(X - r_i)(X + r_i)$$

Comme $r_i \neq -r_i$ et $r_i \neq r_j$ pour $i \neq j$ (on a $r_i^2 = \alpha_i \neq \alpha_j = r_j^2$), on trouve que $\pi_{u^2}(X^2)$ est scindé à racines simples, et donc u est diagonalisable.

2. Comme on l'a vu, des problèmes peuvent apparaitre quand 0 est une valeur propre de u. Par exemple, considérons la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $M^2 = 0$ est diagonalisable, et pourtant, le polynôme minimal de M est X^2, qui n'est pas scindé à racines simples. De façon générale, les endomorphismes nilpotents d'indice 2 fournissent tous des contre-exemples au résultat de la question 1 quand on considère un endomorphisme non inversible.

3. On vérifie que, en caractéristique 2, on a $u^2 = \mathrm{Id}$, donc u^2 est diagonalisable. Pourtant, on vérifie que $\chi_u = \pi_u = (X-1)^2$ n'est pas à racines simples, et donc que u n'est pas diagonalisable.

† *Endomorphismes nilpotents*

Exercice 5.
1. Si u est nilpotent, alors son polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = X^n$. Comme la trace de u est (au signe près) le coefficient de degré $n-1$ de χ_u (somme des valeurs propres avec multiplicités), on trouve $\mathrm{tr}(u) = 0$. Comme pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, u^p est nilpotent également, on trouve $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

2.(a) Par définition, u^k et $Q(u)$ sont des polynômes en u, qui commutent donc avec u. On a alors que $\mathrm{Ker}\, u^k, \mathrm{Im}\, u^k, \mathrm{Ker}\, Q(u), \mathrm{Im}\, Q(u)$ sont des espaces u-stables. Le fait que $E = F \oplus G$ est une conséquence du lemme des noyaux puisque $E = \mathrm{Ker}(\pi_u(u))$ et puisque X^k et $Q(X)$ sont premiers entre eux par construction.
(b) Par définition, pour tout $x \in G$, on a $Q(u)(x) = 0 = Q(u_G)(x) = 0$, d'où $Q(u_G) = 0$.
Posons $Q(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$. On a

$$0 = \mathrm{tr}(0) = \mathrm{tr}(Q(u_G)) = \sum_{i=0}^{r} a_i \,\mathrm{tr}(u_G^i) = a_0 \dim G + \sum_{i=1}^{r} a_i \,\mathrm{tr}(u_G^i).$$

Comme $a_0 \neq 0$, $\dim G \neq 0$ implique qu'il doit exister un certain $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\mathrm{tr}(u_G^i) \neq 0$.
En choisissant une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u_G) \end{pmatrix}$$

Pour tout $p \geqslant 1$, on a $\mathrm{tr}(u^p) = \mathrm{tr}(u_{|F}^p) + \mathrm{tr}(u_G^p)$. Comme $u_{|F}$ est nilpotent, sa trace et celle de ses puissances sont toutes nulles, on trouve donc $\mathrm{tr}(u_G^p) = \mathrm{tr}(u^p)$, qui est non nul pour un certain p d'après ce qu'on a dit précédemment.
(c) Comme par hypothèse, on a $\mathrm{tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$, on a une contradiction avec $\mathrm{tr}(u_G^p) \neq 0$ pour un certain p. La contradiction vient de $\dim G \neq 0$, on a donc $G = \{0\}$. Ceci implique $E = F = \mathrm{Ker}\, u^k$, donc X^k annule u, qui est alors nilpotent.

Exercice 6. On note K_i le noyau de u^i. Par hypothèse, on a $K_2 = E$, la suite des noyaux emboités est donc

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 = \mathrm{Ker}\, u \subset K_2 = E.$$

Comme la suite des noyaux emboités s'essouffle, on a $\dim \mathrm{Ker}\, u \geqslant (\dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u)$. En notant $d := \dim \mathrm{Ker}\, u$, on trouve $d \geqslant 4 - d$ et donc $d \geqslant 2$. On a $d \neq 4$ par hypothèse puisque u est non nul, on a donc $d \in [\![2, 3]\!]$. (autre méthode, le fait que u soit nilpotent d'indice 2 entraîne $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$, on peut alors utiliser le théorème du rang pour avoir $d \in [\![2, 3]\!]$).

Si $d = 2$, alors la partition de 4 associée à u est $(2, 2)$. On procède alors comme dans la preuve de l'existence de la réduite de Jordan : Soit G un supplémentaire à $\operatorname{Ker} u$ dans E. On a $\dim G = 2$, et on peut prendre x, y une base de G. Comme $G \oplus \operatorname{Ker} u = E$, on a $\operatorname{Ker} u \cap G = \{0\}$, et donc u est injective sur G. La famille $\{u(x), u(y)\}$ est alors une famille libre de $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, et donc c'est une base. On obtient alors une base $\{x, u(x), y, u(y)\}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la seconde forme voulue.

Si $d = 3$, alors la partition de 4 associée à u est $(3, 1)$. On procède alors comme dans la preuve de l'existence de la réduite de Jordan : Soit G un supplémentaire à $\operatorname{Ker} u$ dans E. On a $\dim G = 1$, et on peut prendre x une base de G. Comme $G \oplus \operatorname{Ker} u = E$, on a $\operatorname{Ker} u \cap G = \{0\}$, et donc u est injective sur G. La famille $\{u(x)\}$ est alors une famille libre de $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, que l'on complète en une base $\{u(x), a, b\}$ de $\operatorname{Ker} u$. On obtient alors une base $\{x, u(x), a, b\}$ de E, dans laquelle la matrice de u est de la seconde forme voulue (puisque $a, b \in \operatorname{Ker} u$).

Exercice 7. On suppose d'abord que $X \leqslant_{el} Y$. On note $X = (X_1, \ldots, X_r)$. On a deux cas à considérer : premièrement, si $X_r = 1$ et si c'est cette case du diagramme qui bouge pour passer du tableau de Young de X à celui de Y, alors on a $Y = (X_1, \ldots, X_i + 1, X_{i+1}, \ldots, X_{r-1})$, et $X_i = X_{i+1}, \ldots = X_{r-1}$. Deuxièment, si la case qui bouge provient d'une colonne du tableau de X de hauteur > 1, disons X_j, alors on a $Y = (X_1, \ldots, X_i + 1, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_j - 1, \ldots, X_r)$ et $X_i = X_{i+1} = \ldots = X_{j-1}$. Dans les deux cas, on calcule explicitement X^* et Y^* et on voit que $Y^* \leqslant_{el} X^*$.

Maintenant dans le cas général où $X \leqslant Y$. Il existe une suite $X_0, \ldots, X_r$ telle que $X_0 = X$, $X_r = Y$ et $X_i \leqslant_{el} X_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$. Par ce qu'on a vu, on a $X_{i+1}^* \leqslant_{el} X_i^*$ pour $i \in [\![0, r-1]\!]$, et donc $Y^* \leqslant X^*$. Enfin pour la réciproque, si $Y^* \leqslant X^*$, alors $X^{**} = X \leqslant Y = Y^{**}$.

Exercice 8. Le polynôme caractéristique de $2u$ est donné par

$$\chi_{2u}(X) = \det(2u - XI_n) = \det\left(2\left(u - \frac{X}{2}I_n\right)\right) = 2^n \det\left(u - \frac{X}{2}I_n\right) = 2^n \chi_u\left(\frac{X}{2}\right)$$

Si $\chi_u(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on obtient

$$\chi_{2u}(X) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{2^{n-i}} X^i$$

Si u et $2u$ sont semblables, alors on a

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \frac{a_i}{2^{n-i}} = a_i \Leftrightarrow (1 - 2^{n-i})a_i = 0.$$

En particulier, cela entraîne $a_i = 0$ pour $i < n$, on a alors $\chi_u = X^n$ et u est nilpotent.
Réciproquement, supposons que u est nilpotent. Pour tout $i \geqslant 0$ et $x \in E$, on a

$$u^i(x) = 0 \Leftrightarrow 2^i u^i(x) = (2u)^i(x) = 0.$$

Autrement dit, les suites de noyaux emboités pour u et pour $2u$ sont égales. Les termes successifs de ces suites ont donc les mêmes dimensions, et $Y(u) = Y(2u)$, d'où u et $2u$ semblables par le théorème de Jordan.

Exercice 9. Supposons d'abord que u est nilpotent. On a vu dans l'exercice précédent que u est semblable à $2u$, il est donc semblable à $\frac{1}{2}u$. Par une récurrence immédiate, on obtient que u est semblable à tous les $\frac{1}{2^n}u$. Cette dernière suite converge clairement vers 0, qui est donc dans l'adhérence de la classe de similitude de u.

Réciproquement, supposons que 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de u. Fixons une base $\mathcal{B}$ de E et M la matrice de u dans cette base. L'identification $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(k)$ issu du choix de $\mathcal{B}$ identifie la classe de similitude de u avec celle de M. Par hypothèse, il existe une suite $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que $P_m M P_m^{-1}$ converge vers 0. Comme le produit des matrices est une application continue, on a que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P_m M P_m^{-1})^p = P_m M^p P_m^{-1}$ converge vers $0^p = 0$. Comme la trace est une application linéaire (donc continue), on en déduit que

$$\lim_{m \to +\infty} \operatorname{tr}(P_m M^p P_m^{-1}) = \operatorname{tr}(0) = 0.$$

Comme la trace est constante sur les classes de similitude, cette limite est également la valeur de $\operatorname{tr}(M^p)$. On obtient donc $\operatorname{tr}(M^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et donc M est nilpotente d'après un exercice précédent.

† *Calcul de réduction de Jordan*

Exercice 10.

1. Si $m \neq 1$, alors A_m admet deux valeurs propres m et 1, de multiplicités respectives 1 et 2. Si $m = 1$, alors A_m admet 1 comme unique valeur propre, de multiplicité 3.

2. Si $m \neq 1$, alors les facteurs irréductibles de χ_{A_m} sont $(X - m)$ et $(X - 1)$. Comme les facteurs irréductibles de π_{A_m} et de χ_{A_m} sont les mêmes, on a soit $\pi_{A_m} = (X - m)(X - 1)$, ou bien $\pi_{A_m} = \chi_{A_m}$. Pour distinguer les deux, il suffit de tester

si $(A_m - mI_3)(A_m - I_3) = 0$ ou non. En général, on a

$$(A_m - mI_3)(A_m - I_3) = \begin{pmatrix} -m+2 & m-1 & -1 \\ -m+1 & 0 & m-1 \\ 1 & m-1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m-1 & -1 \\ -m+1 & m-1 & m-1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{pmatrix} = m(m-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ (cas déjà exclus de toute façon), alors $(A_m - mI_3)(A_m - I_3) \neq 0$ et le polynôme minimal de A_m est χ_{A_m}.
Si $m = 0$, on a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme minimal est $X(X-1)$.
Si $m = 1$, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A_1 - I_3 \neq 0$, et $(A_1 - I_3)^2 = (A_1 - mI_3)(A_1 - I_3) = 0$ par le calcul général effectué dans les cas précédent. Le polynôme minimal de A_1 est donc $(X-1)^2$.
Pour résumer, on a les polynômes minimaux suivants

Valeurs de m	π_{A_m}
$m = 0$	$X(X-1)$
$m = 1$	$(X-1)^2$
$m \notin \{0, 1\}$	$(X-m)(X-1)^2$

Comme A_m est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples, on trouve que A_m est diagonalisable seulement pour $m = 0$. Pour diagonaliser A_0, on calcule les espaces propres de A_0 :

— $E_0 = \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Vect}(1,1,1)$

— $E_1 = \operatorname{Ker} A_0 - I_3 = \operatorname{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$.

Dans la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$, on trouve la matrice $\operatorname{diag}(0,1,1)$.

3. On commence par traiter le cas $m = 1$. L'espace caractéristique $N_1 = \operatorname{Ker}(A_1 - I_3)^3$ est égal à E. Autrement dit, A_1 est unipotente et $A_1 - I_3$ est nilpotente. On a

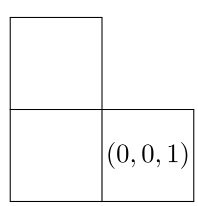
$$A_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $(A_1 - I_3)^2 = 0$, la suite des noyaux emboités est de la forme

$$\{0\} = K_0 \subset K_1 = \operatorname{Ker}(A_1 - I_3) \subset K_2 = E$$

Comme la seule partition de $\dim E = 3$ en deux termes est $(2,1)$, on a d'emblée la partition $Y(A_1 - I_3) = (2,1)$. Cela nous permet d'un coup d'affirmer que $A_1 - I_3$ est semblable à la matrice de Jordan $\operatorname{diag}(J_1, J_2)$, et donc A_1 est semblable à $\operatorname{diag}(J_1(1), J_2(1))$. Mais on peut être plus précis et calculer une base de Jordanisation.

Comme d'habitude, on remplit le tableau de Young de $A_1 - I_3$. On commence par fixer G un supplémentaire à K_1 dans E. On a $K_1 = \operatorname{Vect}((0,1,0),(1,0,1))$, on peut prendre $G = \operatorname{Vect}(0,0,1)$. On a



On prend ensuite l'image $(A_1 - I_3).(0,0,1) = (-1,0,-1)$, et on remplit

$(-1,0,-1)$	$(0,0,1)$

Pour finir, on prend un supplémentaire à $\mathrm{Vect}(-1,0,-1)$ dans K_1, par exemple $\mathrm{Vect}(0,1,0)$:

$(0,1,0)$	
$(-1,0,-1)$	$(0,0,1)$

En lisant les lignes du tableau, on obtient une base de Jordanisation $\{(0,1,0),(-1,0,-1),(0,0,1)\}$, dans laquelle la matrice $A_1 - I_3$ a la forme voulue. On peut vérifier que dans cette base, la matrice A_1 devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>On traite ensuite le cas $m \neq 0, m \neq 1$:</u> On calcule les espaces caractéristiques :

$$N_m := \mathrm{Ker}\, A_m - mI_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -m+2 & m-1 & -1 \\ -m+1 & 0 & m-1 \\ 1 & m-1 & -m \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(1,1,1),$$

$$N_1 := \mathrm{Ker}(A_m - I_3)^2 = \mathrm{Ker}(m-1)^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$$

Sur l'espace N_m, la réduction est déjà faite : N_m est en fait l'espace propre de A_m pour la valeur propre m, et $A_{m|N_m}$ est simplement la multiplication par m. Sur l'espace N_1, on a

$$A_m.(1,1,0) = (m+1,1,m) = (1,1,0) + m(1,0,1) \text{ et } A_m.(1,0,1) = (1,0,1)$$

La matrice $A_{m|N_1}$ dans la base $(1,1,0),(1,0,1)$ est alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

En considérant la base $(m,0,m),(1,1,0)$, on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est la réduite de Jordan de $A_{m|N_1}$. Au final, dans la base $(1,1,1),(m,0,m),(1,1,0)$, on trouve la forme de Jordan

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

† *Applications*

Exercice 11.
1. Soit J une matrice de Jordan. Il s'agit d'une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme $J_m(\lambda)$ pour $\lambda \in k$ sur la diagonale. La matrice ${}^tJ$ transposée de J est elle aussi diagonale par blocs, avec des blocs de la forme ${}^t(J_m(\lambda))$ sur la diagonale. Si chaque bloc de Jordan est semblable à son transposé, alors on obtient que J est semblable à sa transposée (en prenant une matrice dans $\mathrm{GL}_n(k)$, diagonale par blocs, avec sur la diagonale des blocs de la forme $P \in \mathrm{GL}_m(k)$ conjuguant $J_m(\lambda)$ en ${}^t(J_m(\lambda))$. Il suffit donc de répondre à la question pour les blocs de Jordan.
Soit $J_m(\lambda)$ un bloc de Jordan, on a $J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m$, où $J_m = J_m(0)$ est un bloc de Jordan nilpotent. Si J_m est semblable à ${}^t(J_m)$, disons par une matrice $P \in \mathrm{GL}_m(k)$, alors

$$PJ_m(\lambda)P^{-1} = P(\lambda I_m + J_m)P^{-1} = \lambda P I_m P^{-1} + PJ_mP^{-1} = \lambda I_m + {}^t(J_m) = {}^t(J_m(\lambda)).$$

Il suffit donc de montrer que le bloc de Jordan nilpotent J_m est semblable à son transposé. On peut bien-sûr exhiber une matrice de passage explicite, mais on peut aussi utiliser le théorème de Jordan : La matrice ${}^t(J_m)$ agit sur la base canonique de k^n par ${}^t(J_m).e_i = e_{i+1}$ pour $i < n$ et ${}^t(J_m).e_n = 0$. Le noyau de $({}^t(J_m))^i$ est donc $\mathrm{Vect}(e_{n-i+1}, \dots, e_n)$ et est de dimension i. Les partitions $Y(J_m)$ et $Y({}^tJ_m)$ sont donc toutes deux égales à $(1, \dots, 1)$, et J_m et ${}^tJ_m$ sont semblables, ce qui termine la preuve.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$. Puisque k est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de M est scindé, et M admet une réduite de Jordan J : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $PMP^{-1} = J$. Par la question précédente, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $QJQ^{-1} = {}^tJ$. La matrice $R := {}^tPQP \in \mathrm{GL}_n(k)$ est donc telle que

$$\begin{aligned} RMR^{-1} &= {}^tP(Q(PMP^{-1})Q^{-1})({}^tP)^{-1} \\ &= {}^tP(QJQ^{-1})({}^tP)^{-1} \\ &= {}^tP({}^tJ)^t(P^{-1}) \\ &= {}^t(P^{-1}JP) \\ &= {}^tM \end{aligned}$$

et M est semblable à sa transposée.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$, et soit L une cloture algébrique de k. Par la question précédente, M et ${}^tM$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(L)$. On sait qu'elles sont alors semblables dans $\mathcal{M}_n(k)$.

Exercice 12.
1. Soit $M \in D_n^{\mathrm{reg}}(k)$. Puisque toutes les valeurs propres de M sont distinctes, le polynôme caractéristique de M a n racines distinctes. Puisqu'il est de degré n, il est donc scindé à racines simples et M est en particulier diagonalisable.

2. Soit $M \in D_n(\mathbb{K})$, et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que PMP^{-1} est une matrice diagonale, disons $D := PMP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, où les λ_i sont tous distincts deux à deux, et où chaque λ_i apparait n_i fois. On peut considérer ε la moitié de la distance minimale entre deux λ_i distincts (qui est donc non nul), et considérer la suite

$$D_n := \mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{n}, \lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2n}, \dots, \lambda_1 + \varepsilon_{n_1 n}, \lambda_2 + \frac{\varepsilon}{n}, \dots, \lambda_2 + \frac{\varepsilon}{n_2 n}, \dots, \lambda_r + \frac{\varepsilon}{n_r n}\right).$$

Par construction, D_n est une matrice diagonale dont toutes les valeurs propres sont distinctes : le choix de ε fait qu'il n'y a pas de coincidences entre un $\lambda_i + \frac{\varepsilon}{mn}$ et un $\lambda_j + \frac{\varepsilon}{m'n}$, et on a évidemment $\lambda_i + \frac{\varepsilon}{mn} \neq \lambda_i + \frac{\varepsilon}{m'n}$ pour $m \neq m'$. La suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers D, et par continuité du produit de matrices, la suite $(P^{-1}D_nP)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ qui converge vers $P^{-1}DP = M$.

3. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Elle s'écrit $T = D + N$ où D est la partie diagonale, et N la partie supérieure (donc nilpotente). On peut écrire D comme dans la question précédente, et considérer la même suite D_n. La matrice $T_n := D_n + N$ est une matrice triangulaire supérieure, dont toutes les valeurs diagonales (qui sont donc ses valeurs propres) sont distinctes deux à deux. On obtient que $T_n \in \mathbb{D}_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ et que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices de $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ qui converge vers T.

4. Comme $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K})$, on a $\overline{D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})} \subset \overline{D_n(\mathbb{K})}$, il suffit donc de montrer que $T_n(\mathbb{K}) \subset \overline{D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})}$ pour conclure. Par la question précédente, on a que toute matrice triangulaire supérieure se trouve dans $\overline{D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})}$. Soit maintenant $M \in T_n(\mathbb{K})$, et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que PMP^{-1} soit triangulaire supérieure. On peut alors prendre une suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ qui converge vers PMP^{-1}. Par continuité du produit de matrices, la suite $(P^{-1}D_nP)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})$ qui converge vers M, d'où $M \in \overline{D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{K})}$.

5.(*a*) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la réduction de Jordan donne que $T_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ est dense dans $T_n(\mathbb{C})$, on a bien le résultat.

(b) Le théorème de Cayley-Hamilton est clairement vrai pour les matrices diagonales à valeurs propres distinctes. Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et D une matrice diagonale à valeurs propres distinctes, on pose $M := PDP^{-1} \in D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$, et on a

$$\chi_M(M) = \chi_D(PDP^{-1}) = P\chi_D(D)P^{-1} = 0$$

Donc le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour toute matrice dans $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$. Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D_n^{\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$ qui converge vers M. Comme les coefficients du polynôme caractéristiques sont continus (polynomiaux) en les coefficients de la matrice considérée, on a que la suite χ_{D_n} est une suite de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n qui converge vers χ_M. La suite $\chi_{D_n}(D_n)$ converge vers $\chi_M(M)$, mais comme $\chi_{D_n}(D_n)$ est identiquement nulle, on obtient que $\chi_M(M) = 0$, soit le théorème de Cayley-Hamilton.

6.(a) On l'a déjà montré précédemment : les coefficients du polynôme caractéristique sont des fonctions polynomiales donc continues en les coefficients de la matrice. Comme une suite de polynôme de degré fixée converge si et seulement si tous les coefficients convergent, on a bien le résultat voulu.
(b) On sait que l'application qui à un polynôme de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ associe l'ensemble de ses racines est continue, à valeur dans l'ensemble $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ des multiensembles de n points complexes (Exercice F.33 dans H2G2). Si la suite des χ_{D_n} est scindée, alors le multiensemble des racines de χ_{D_n} vit en fait dans $\mathbb{R}^n/\mathfrak{S}_n$, qui est un fermé de $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$. En passant à la limite, les racines de χ_{D_∞} sont également un élément de $\mathbb{R}^n/\mathfrak{S}_n$, et donc χ_{D_∞} est scindé.
(c) Nous venons en particulier de montrer que, pour tout $M \in \overline{D_n(\mathbb{R})}$, le polynôme χ_M est scindé, autrement dit M est trigonalisable, d'où $\overline{D_n(\mathbb{R})} \subset T_n(\mathbb{C})$. Comme on avait déjà l'inclusion réciproque par la question 4, on a bien le résultat voulu.

Exercice 13.
1. Comme λ est non nul, on peut écrire $J_n(\lambda) = \lambda I_n + J_n = \lambda(1 + \frac{1}{\lambda}J_n)$. La matrice $\frac{1}{\lambda}J_n$ est nilpotente, et donc la matrice $1 + \frac{1}{\lambda}J_n$ est unipotente. Comme $\lambda \in \mathbb{C}$ est non nul, il existe un nombre complexe l tel que $e^l = \lambda$. La matrice $L_n(\lambda) := l + L(1 + \frac{1}{\lambda}J_n)$ est alors telle que

$$\exp\left(l + L\left(1 + \frac{1}{\lambda}J_n\right)\right) = e^l \exp\left((L\left(1 + \frac{1}{\lambda}J_n\right)\right) = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}J_n\right) = J_n(\lambda).$$

2. Considérons une matrice diagonale par blocs $D = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r)$. On sait que $D^n = \mathrm{diag}(M_1^n, \ldots, M_r^n)$, et donc $\exp(D) = \mathrm{diag}(\exp(M_1), \ldots, \exp(M_r))$. À présent, considérons une matrice de Jordan $J = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_r}(\lambda_r))$ avec tous les λ_i non nuls pour que J soit inversible. La matrice $\mathrm{diag}(L_{n_1}(\lambda_1), \ldots, L_{n_r}(\lambda_r))$ est alors un antécédent de J par l'exponentielle.

3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut considérer $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $J := PMP^{-1}$ soit une matrice de Jordan, inversible car M est inversible. Par la question précédente, il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(H) = J$. On sait alors que $\exp(P^{-1}HP) = P^{-1}JP = M$, et donc M admet des antécédents par l'exponentielle de matrices.