Rappels et exercices sur le groupe linéaire II - Correction

1 Groupes topologiques

Exercice 1. Comme la topologie de $\mathbb{C}$ (et de $\mathbb{C}^*$ par restriction) est métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.
Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$, et $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $(\mathbb{C}^*)^2$ qui converge vers (a, b). On sait que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers a et b, respectivement. On doit montrer que la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ab. On a

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |a_n - a|b$$

Par hypothèse, la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, le terme $|a_n||b_n-b|$ converge vers 0. De même, $|a_n - a||b|$ converge vers 0, d'où le résultat.
Soit ensuite $a \in \mathbb{C}^*$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a, on a

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{aa_n}\right| = \frac{|a - a_n|}{|aa_n|}$$

Comme $(|aa_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}^*$ qui converge, elle est donc minorée par une constante $\lambda > 0$, d'où

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\lambda} \to 0$$

et le résultat.

Ensuite, $\mathbb{S}^1$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, et forcément un groupe topologique pour la topologie induite (le produit et le passage à l'inverse sont continus par restriction).

Exercice 2. On fixe $g \in G$. On commence par vérifier que l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota_g : & G & \longrightarrow & G \times G \\ & h & \longmapsto & (g, h) \end{array}$$

est continue. Soit $U \subset G \times G$ un ouvert. on montre que $\iota_g^{-1}(U) = \{h \in G \mid (g, h) \in U\}$ est ouvert dans G. Soit $h \in \iota_g^{-1}(U)$, on a $(g, h) \in G \times G$. Par définition de la topologie produit, on peut choisir un voisinage U_g (resp. U_h) de g dans G (resp. de h dans G), tel que $U_g \times U_h \subset U$. On a en particulier $\{g\} \times U_h \subset U$, et donc $U_h \subset \iota_g^{-1}(U)$. L'ensemble $\iota_g^{-1}(U)$ est alors ouvert car il contient un voisinage de chacun de ses points.

Comme ι_g est continue, on conclut facilement que $L_g = \mu \circ \iota_g$ est continue. Il s'agit également d'une bijection, de réciproque $L_{g^{-1}}$, qui est continue : c'est un homéomorphisme. On applique un raisonnement similaire pour R_g en regardant l'application $h \mapsto (h, g)$.

Exercice 3. On pose $\mathcal{F}_H := \{F \in \mathcal{P}(G) \mid F \text{ est fermé et } H \subset F\}$ l'ensemble des fermés de G qui contiennent H. On a par définition

$$\overline{H} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_H} F.$$

1. Comme H est un sous-groupe de G, on a $\iota(H) = H$. Soit $F \in \mathcal{F}_H$. Comme ι est un homéomorphisme de G, $\iota(F)$ est aussi un fermé, qui contient $\iota(H) = H$, on a donc $\iota(F) \in \mathcal{F}_H$. Comme $\iota^2 = Id$, on voit que ι induit une bijection de $\mathcal{F}_H$ dans lui-même, ainsi

$$\iota(\overline{H}) = \iota\left(\bigcap_{F\in\mathcal{F}_H} F\right) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_H} \iota(F) = \bigcap_{F'\in\mathcal{F}_H} F' = \overline{H}.$$

2. Soient $x, y \in \overline{H}$, et U un voisinage ouvert de xy. On cherche à montrer que $U \cap H \neq \varnothing$. Comme le produit est continu, $\mu^{-1}(U)$ est un voisinage de (x, y) dans $G \times G$. Par définition de la topologie produit (engendrée par les produits d'ouverts), il existe alors U_x, U_y des voisinages ouverts respectifs de x et y tels que $U_x \times U_y \subset \mu^{-1}(U)$. Comme $x, y \in \overline{H}$, les ouverts U_x et U_y contiennent chacun un point de H, disons h et h'. On a $(h, h') \in U_x \times U_y \subset \mu^{-1}(U)$ et $hh' \in U \cap H$, d'où le résultat.

3. Nous avons montré à la question 1) que $\iota(\overline{H}) = \overline{H}$, autrement dit que $\overline{H}$ est stable par inverse. Ensuite, nous avons montré à la question 2) que $\overline{H}$ est stable par produit. Comme $\overline{H}$ est non vide (il contient H), nous avons bien que $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 4.

1. Comme dans le cas des groupes topologiques, on commence par vérifier que l'application $\iota_x : g \mapsto (g, x)$ de G vers $G \times X$ est continue. Soit $U \subset G \times X$ un ouvert. on montre que $\iota_x^{-1}(U) = \{g \in G \mid (g, x) \in U\}$ est ouvert dans G. Soit $g \in \iota_x^{-1}(U)$, on a $(g, x) \in G \times X$. Par définition de la topologie produit, on peut choisir un voisinage U_g de g dans G, et un voisinage U_x de x dans X, tel que $U_g \times U_x \subset U$. On a en particulier $U_g \times \{x\} \subset U$, et donc $U_g \subset \iota_x^{-1}(U)$. L'ensemble $\iota_x^{-1}(U)$ est alors ouvert car il contient un voisinage de chacun de ses points.

Comme ι_x est continue, on conclut facilement que $\alpha_x = \alpha \circ \iota_x$ est continue.

2. Soit $g \in G$. Par définition du stabilisateur dans une action de groupe, on a

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{Stab}_G(x) &\Leftrightarrow g.x = \alpha_x(g) = x \\ &\Leftrightarrow g \in \alpha_x^{-1}(\{x\}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Stab}_G(x) = \alpha_x^{-1}(\{x\})$. Comme X est séparé, $\{x\}$ est fermé, de même que son image réciproque par l'application continue α_x.

3. On utilise que la translation par $g \in G$ est un homéomorphisme. Soient $y \in \overline{\mathcal{O}}$, $g \in G$, et U un voisinage de $g.y$. L'ensemble $g^{-1}(U)$ est un voisinage de y. Comme y est adhérent à $\mathcal{O}$, ce voisinage contient un point $h \in \mathcal{O}$. En translatant par g, on obtient que U contient $g.h \in \mathcal{O}$. Comme tout voisinage de $g.y$ intersecte $\mathcal{O}$ non trivialement, on obtient bien que $g.y \in \overline{\mathcal{O}}$.

Exercice 5.

1. Par restriction, $f : H \to \{0, 1\}$ est une application continue. Comme H est connexe, $f_{|H}$ est constante. Considérons la translation L_g par g, il s'agit d'un homéomorphisme de G. Donc $f \circ L_g$ est également une fonction continue de G vers $\{0, 1\}$. En particulier, pour $h, h' \in H$, on a $f \circ L_g(h) = f(gh) = f(gh') = f \circ L_g(h')$. Donc f est constante sur les classes à gauche modulo H.

2. Comme f est constante sur gH, on peut définir $\overline{f}(gH) := f(x)$ pour $x \in gH$ (le choix de x ne change pas la valeur de $f(x)$ justement car f est constante sur gH). L'application $\overline{f}$ est continue car, pour un ouvert U de $\{0, 1\}$, on a

$$\overline{f}^{-1}(U) = \{gH \mid f(g) \in U\} = \pi(\{g \mid f(g) \in U\}) = \pi(f^{-1}(U))$$

qui est un ouvert de G/H.

3. Par la question précédente, $\overline{f} : G/H \to \{0, 1\}$ est continue, donc constante car G/H est connexe. On a donc que $\overline{f}$ prend la même valeur sur toute les classes à gauche modulo H, comme ces classes à gauche forment une partition de G, on obtient que $\overline{f}$ est constante sur G. Nous avons montré que toute application continue $G \to \{0, 1\}$ est constante, ce qui est une caractérisation de la connexité de G.

2 Groupes de matrices

Exercice 6.
1. Par définition, le déterminant est une fonction polynomiale en les coordonnées de la matrice considérée. Il s'agit en particulier d'une application continue.

2. Les coordonnées d'une matrice produit sont des fonctions polynomiales en les coordonnées des deux facteurs, donc le produit de matrices est continu. Pour l'inverse, la fonction associant à une matrice la transposée de sa comatrice est continue (les coordonnées de la comatrice sont des déterminants), et comme le déterminant est continu et non nul sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il en va de même de $\frac{1}{\det}$, d'où le résultat.

3. Soit (ε_m) une suite de $\mathbb{K}^*$ convergeant vers 0. On considère la suite $A_m = A - \varepsilon_m I_n$, qui converge clairement vers A. On a

$$\det(A_m) = \det(A - \varepsilon_m I_n) = \chi_A(\varepsilon_m)$$

Comme χ_A est un polynôme non nul, il existe un certain $r > 0$ tel que toute racine non nulle de χ_A ait un module supérieur à r. Or, à partir d'un certain rang, $|\varepsilon_m| < r$, donc $\det(A_m) \neq 0$ à partir de ce rang. On obtient donc une suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A.

Exercice 7.
1. Comme le déterminant est polynomial en les coordonnées et l'application $z \mapsto zA + (1-z)B$ est polynomiale en z, P est une application polynômiale de $\mathbb{C}$ vers lui même, autrement dit un polynôme. De plus, P est non nul car $P(0) = \det(B) \neq 0$.

2. Comme P est un polynôme complexe non nul, il admet un nombre fini de racines. On pose $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathbb{C}$ privé des racines de P. Il s'agit d'un plan privé d'un nombre fini de points, donc connexe par arcs, et il contient $0, 1$ car A et B sont inversibles. Il existe un chemin γ dans $\mathcal{C}$ allant de 0 à 1, donc

$$\forall t \in [0,1],\ P(\gamma(t)) = \det(\gamma(t)A + (1-\gamma(t))B) \neq 0$$

3. Avec les notations de la question précédente, le chemin $t \mapsto \gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ est un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ allant de B vers A.

4. L'application det est continue et surjective de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^*$, comme ce dernier espace n'est pas connexe, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Exercice 8.
L'ensemble considéré contient $(i, \sqrt{2})$, et plus généralement, la suite $(ni, \sqrt{n+1})$, qui n'est pas bornée. Ensuite, pour (a,b) dans l'ensemble considéré, on a

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$$

donc $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ n'est pas borné : pour la norme $\|\|\|_\infty$, l'ensemble des matrices $M(a,b)$ n'est pas borné. Donc $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ n'est pas compact, de même que $\mathrm{O}_2(\mathbb{C})$ qui le contient.

2. Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est donné par les endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$ qui préservent le produit scalaire usuel, donc qui agissent par isométrie. En utilisant la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne, on a que tous les éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sont de norme 1. En particulier $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont bornés. Comme ils sont également fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, ils sont compacts.

3. On sait que toute matrice de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est conjuguée, dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R(\theta_r) & & \\ & & & -I_k & \\ & & & & I_{k'} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 2r + k + k' = n$$

Le déterminant d'une telle matrice est $(-1)^k$. Une matrice écrite sous cette forme se trouve donc dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si k est pair. Ensuite, on note que $-I_2 = R(\pi)$. On peut alors remplacer $-I_k$ par une matrice diagonale par bloc

$$\begin{pmatrix} R(\pi) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\pi) & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} R(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & R(\pi) \end{pmatrix}$$

selon si k est impair ou pair. Ainsi, une matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est conjuguée (dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$) à une matrice de la forme

$$M(\theta_1, \cdots, \theta_r, k') := \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & R(\theta_r) & \\ & & & I_{k'} \end{pmatrix}$$

Soit $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et soit $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $PAP^{-1} = M(\theta_i, k')$ comme ci-dessus. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on considère le chemin

$$\gamma_\theta : t \mapsto R(t\theta)$$

qui est un chemin continu de I_2 vers $R(\theta)$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On considère le chemin continu

$$\Gamma : t \mapsto M(t\theta_j, k') = \begin{pmatrix} \gamma_{\theta_1}(t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \gamma_{\theta_r}(t) & \\ & & & I_{k'} \end{pmatrix}$$

Qui est clairement dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et va de I_n vers $M(\theta_j, k')$. Comme le produit matriciel (et l'inverse des matrices) est continu, le chemin $t \mapsto P^{-1}\Gamma(t)P$ est un chemin continu de $P^{-1}I_nP = I_n$ vers A, donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc.

Exercice 9.

1. Comme A est inversible, on peut noter $A^{-1}(AB)A = BA$, et donc AB et BA sont conjuguées par A. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda I_n) = \det(A^{-1})\det(AB - \lambda I_n)\det(A) = \det(BA - \lambda I_n) = \chi_{BA}(\lambda)$$

Comme ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et que $\mathbb{K}$ est infini, on obtient que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ une matrice carrée. On rappelle que le déterminant de A est donné par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

Ainsi, le déterminant de $A - \lambda I_n$ est donné par

$$\det(A - \lambda I_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{\sigma(i) \neq i} a_{\sigma(i),i} \prod_{\sigma(i) = i} (a_{i,i} - \lambda)$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé, le polynôme $\prod_{\sigma(i) \neq i} a_{\sigma(i),i} \prod_{\sigma(i)=i}(a_{i,i} - \lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ a pour degré le nombre de points fixes de σ, et ses coefficients sont des polynômes en les coefficients de A. Ainsi, $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de A.

En identifiant $\mathbb{K}_n[\lambda]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ en tant qu'espace vectoriel normé. On obtient que $A \mapsto \chi_A$ est une application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{n+1}$, dont les coordonnées sont polynomiales, il s'agit en particulier d'une application continue.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme le produit des matrices est continu, les suites $(A_nB)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(BA_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AB et BA. Par continuité

du polynôme caractéristique, les suites de polynômes $(\chi_{A_nB})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\chi_{BA_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers χ_{AB} et χ_{BA}. Enfin, par la question 1, les suites χ_{A_nB} et χ_{BA_n} sont en fait égales, il en va donc de même de leur limite : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ comme annoncé.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on sait que le terme de degré $n-1$ du polynôme caractéristique de A est donné par $-\operatorname{tr}(A)$. Le résultat est alors une conséquence directe des questions précédentes.

Exercice 10. (Densité des matrices diagonalisables dans les matrices trigonalisables)
1. On construit les coefficients diagonaux ε_i^k de D_k récursivement : On commence par poser $\varepsilon_1^k := 2^{-k}$. En supposant que $\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_i^k$ ont été construits, on choisit ε_{i+1}^k tel que

$$\lambda_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^k \notin \{\lambda_1 + \varepsilon_1^k, \dots, \lambda_i + \varepsilon_i^k\}$$

Un tel $\varepsilon_{i+1}^k \leqslant 2^{-k}$ existe toujours étant donné qu'on cherche à éviter un ensemble fini de valeurs.
Par définition, la norme infinie de D_k est inférieure à $\frac{n}{2^k}$, donc la suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et $(T + D_k)$ converge vers T, tout en étant une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous distincts. Comme $T + D_k$ est triangulaire, ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres, d'où $T + D_k \in \mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$.

2. Soit A une matrice trigonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $PAP^{-1} = T$ soit triangulaire supérieure. Par la question précédente il existe (T_n) une suite de $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ qui converge vers T. Par continuité de la conjugaison des matrices, la suite $(P^{-1}T_nP)$ converge vers A et se trouve dans $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ (car ce dernier est stable par conjugaison).

3. On vient de montrer que $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{K})$ est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables, comme $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, on obtient que ce dernier ensemble est également dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable, d'où le résultat.

Exercice 11. (Cayley-Hamilton)
1. Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes. On sait que

$$\chi_D(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

Or, la matrice $(\lambda_i I_n - D)$ est donnée par $\operatorname{diag}(\lambda_i - \lambda_1, \dots, 0, \dots, \lambda_i - \lambda_n)$: son i-ème coefficient diagonaux est nul. Le produit des matrices $(\lambda_i I_n - D)$ est donc un produit de n matrices diagonales, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le i-ème coefficient du i-ème terme de ce produit est nul : le produit $\chi_D(D)$ est nul.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} soit diagonale à valeurs propres distinctes. Or, on sait que

$$0 = \chi_{PAP^{-1}}(PAP^{-1}) = P\chi_{PAP^{-1}}(A)P^{-1} = P\chi_A(A)P^{-1}$$

d'où $\chi_A(A) = 0$ par conjugaison.

3. Comme le produit des matrices est continu, de même que les sommes, la continuité de $P \mapsto P(A)$ est immédiate. Comme $A \mapsto \chi_A$ est continue d'après l'exercice précédent, on conclut par composition que $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue.

4. Comme l'application $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue et s'annule sur une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la partie $\mathcal{M}_n^{\text{reg}}(\mathbb{C})$), on conclut que cette application est constante égale à 0, d'où le résultat.

Exercice 12. (Connexité de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$)
1. On considère le chemin continu suivant :

$$\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui va de I_2 vers T. On a $\det(\gamma(t)) = 1$ car $\gamma(t)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale. On a le résultat en considérant le chemin

$$t \mapsto \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}$$

2. Soit s une transvection dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. On sait que s est conjuguée à la matrice de la question 1 via une matrice P. En conjuguant le chemin de la question précédente par P^{-1} (opération continue), on obtient un chemin continu de I_n vers s.

3. On sait que les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Il suffit donc de montrer que les produits de transvections sont dans la composante connexe par arcs de I_n. On procède par récurrence sur le nombre de termes apparaissant dans un produit de transvections. Les transvections (i.e les produits de 1 transvections) sont dans la composante connexe par arcs de I_n d'après la première question. Soit maintenant un produit de la forme $s_1 \dots s_{k+1}$. On sait que $s_1 \dots s_k$ est dans la composante connexe par arcs de I_n par hypothèse de récurrence.
On peut considérer un chemin continu de I_n vers s_{k+1} d'après la question 1, la translation par $s_1 \dots s_k$ étant une opération continue, on obtient un chemin continu de $s_1 \dots s_k$ vers $s_1 \dots s_{k+1}$. Par concaténation de ce chemin avec un chemin de I_n vers $s_1 \dots s_{k+1}$, on obtient le résultat voulu.

4. On sait à présent que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^*$ sont connexes (par arcs). Or on a vu précédemment que l'on a une suite exacte courte topologique

$$1 \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* \to 1$$

qui donne alors que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe d'après l'exercice 5

5. Il est clair par restriction que l'on a un morphisme de groupes surjectif $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$. Le noyau de ce morphisme est bien $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par définition. On obtient donc la suite exacte courte voulue, ainsi que la connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ d'après l'exercice 5. Soit M une matrice de déterminant -1. La multiplication par M induit un homéomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, envoyant par définition $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ et inversement. Comme image d'un connexe par un homéomorphisme, $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est connexe. Les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$: ce sont deux connexes, et il n'y a pas de plus grand ensemble connexe dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (sans quoi ce dernier serait connexe, ce qu'on sait être faux).

Exercice 13. (Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)
1. Soient $t, s \in \mathbb{R}$, on doit avoir $f(t+s) = f(t)f(s)$. En utilisant la formule du produit de matrices, on a

$$f_{i,j}(t+s) = \sum_{k=1}^{n} f_{i,k}(t) f_{k,j}(s)$$

2. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\alpha} f_{i,j}(s)ds &= \int_0^{\alpha} f_{i,j}(s+t)ds \\
&= \int_0^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} f_{i,k}(s) f_{k,j}(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a} f_{i,k}(s) f_{k,j}(t)ds \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{a} f_{i,k}(s)ds \right) f_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est la coordonnée (i, j) du produit $\left(\int_0^\alpha f(s)ds\right) f(t)$, comme annoncé.

3. On sait que $F : \alpha \mapsto \int_0^\alpha f(s)ds$ est une primitive de f, nulle en 0. On a

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(s)ds = \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

qui converge, quand α tends vers 0, vers $F'(0) = f(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, pour α assez petit, $\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(s)ds$ se trouve dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. On note g_α la fonction considérée. On a

$$g_\alpha(t) = \frac{F(t+\alpha) - F(\alpha)}{\alpha}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\frac{g_\alpha(t)-g_\alpha(0)}{t} &= \frac{F(t+\alpha)-F(t)}{\alpha t} - \frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha t}\\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{F(t+\alpha)-F(\alpha)}{t} - \frac{F(t)-F(0)}{t}\right)\\ &\to \frac{1}{\alpha}(F'(\alpha)-F'(0)) = \frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}\end{aligned}$$

Soit α assez petit pour que $M_\alpha := \int_0^\alpha f(s)ds$ soit inversible (un tel α existe par la question 3. On a

$$f(t) = M_\alpha^{-1} g_\alpha(t)$$

d'après la question 1. Donc f est dérivable en 0 car g_α est dérivable en 0. Ensuite, pour $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f(s+t)-f(s)}{t} = \frac{f(t)f(s)-f(s)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t} f(s) \to f'(0)f(s)$$

d'où le résultat : f est dérivable en s et $f'(s) = f'(0)f(s)$.

5. L'équation $f' = f'(0)f$ donne, pour toute colonne f_i de f, une équation différentielle linéaire à coefficients constants : $f_i' = f'(0)f_i$. Sachant de plus que $f_i(0) = e_i$ est la i-ème colonne de la matrice identité, on a

$$f_i(t) = e^{tf'(0)} e_i$$

est la i-ème colonne de la matrice $e^{tf'(0)}$. Ceci étant vrai pour toute colonne de f, on obtient $f(t) = e^{tf'(0)}$.

6. C'est évident : comme tM et sM commutent, on a bien $f(t+s) = \exp(sM+tM) = \exp(sM)\exp(tM)$

3 Topologie de quelques actions classiques

Exercice 14. On identifie $\mathbb{K}^n$ avec l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes. Sous cette identification, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ est simplement donnée par le produit des matrices, que l'on sait être une opération continue. On sait que pour cette action, l'orbite de 0 est réduite à $\{0\}$. On montre ensuite que l'orbite du premier vecteur e_1 de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est égale à $\mathbb{K}^n \setminus 0$. Soit $v_1 \in \mathbb{K}^n \setminus 0$. On peut compléter v_1 en une base $V = v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{K}^n$. La matrice P de changement de base de la base canonique vers la base V est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, qui par définition est tel que $P.e_1 = Pe_1 = v_1$. Ainsi, $v_1 \in \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1)$, et donc $\mathbb{K}^n \setminus 0 \subset \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1)$, et $\mathbb{K}^n \setminus 0 = \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1)$.

Ensuite, on calcule les stabilisateurs de 0 et de e_1. On a évidemment $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(0) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, qui est bien fermé. Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $P.e_1 = e_1$ si et seulement si la première colonne de P est égale à e_1. On a alors

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1) = \left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & M\end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{K}^{n-1} \text{ et } M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})\right\} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Comme on considère uniquement des matrices triangulaires par blocs. Une matrice de l'ensemble considéré est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si le bloc M est dans $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$. On a donc

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1) = \left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & M\end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{K}^{n-1} \text{ et } M \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})\right\}$$

qui est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Enfin, en posant $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(0)$ et $\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}(e_1)$, on a $\overline{\mathcal{O}_0} = \mathcal{O}_0$ et $\overline{\mathcal{O}_1} = \mathbb{K}^n = \mathcal{O}_0 \sqcup \mathcal{O}_1$.

Exercice 15.
1. Le groupe B n'est pas distingué dans G. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette dernière matrice ne se trouvant pas dans B. De fait, on peut montrer que $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ est le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires inférieures.

2. Par définition, on a

$$\forall \big(a \quad b\_c \quad d\big) \in G,\ \big(a \quad b\_c \quad d\big).[1:0] = [a:c].$$

Par construction de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, on a $[a:c] = [1:0]$ si et seulement si $\binom{c}{a}$ et $\binom{0}{1}$ sont colinéaires, c'est à dire si $c = 0$. On a donc bien

$$\big(a \quad b\_c \quad d\big) \in \mathrm{Stab}_G([1:0]) \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow \big(a \quad b\_c \quad d\big) \in B.$$

Comme $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est un ouvert de l'espace localement connexe $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, il s'agit d'un espace localement connexe. L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est localement connexe car il s'agit d'une variété. On peut alors appliquer le théorème d'homéomorphisme pour les actions continues pour obtenir l'homéomorphisme souhaité.

3. L'action de B sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}.[x:y] = [ax+by:dy] = \left[\frac{ax+by}{d}:y\right]$$

On peut diviser car $d \neq 0$ ($\det(B) = ad \neq 0$). Il s'agit d'une action continue par restriction de l'action de G. Pour déterminer les orbites pour cette action, on calcule

$$\forall \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix} \in B,\ \begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}.[1:0] = [a:0] = [1:0]$$

On a donc $\mathcal{O}_B([1:0]) = \{[1:0]\}$. Ensuite, on a

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}.[0:1] = [b:d] = \left[\frac{b}{d}:1\right]$$

Soit $[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Si $\mu = 0$, alors $[\lambda:\mu] = [1:0]$. Si $\mu \neq 0$, alors

$$[\lambda:\mu] = \begin{pmatrix}1&\lambda\\0&\mu\end{pmatrix}[0:1] \in \mathcal{O}_B([0:1])$$

On a donc deux orbites pour l'action de B sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$: $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_B([1:0])$ et $\mathcal{O}_1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus [1:0] = \mathcal{O}_B([0:1])$. La première orbite est un singleton, la seconde orbite est homéomorphe à $\mathbb{K}$ par projection stéréographique, elle est en particulier localement compacte. On a $\overline{\mathcal{O}_0} = \mathcal{O}_0$ et $\overline{\mathcal{O}_1} = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_0$.

4. Le sous-groupe $B^- \subset G$ des matrices triangulaires inférieures est le stabilisateur de $[0:1]$ pour l'action de G sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. On obtient la décomposition de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ déduite de la précédente par antipode, c'est à dire $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \{[0:1]\} \sqcup (\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus [0:1]) = \mathcal{O}_{B^-}([0:1]) \sqcup \mathcal{O}_{B^-}([1:0])$.

Exercice 16.
1. On sait déjà que l'application donnée est une action de groupes. De plus, il s'agit d'une application continue car le produit et l'inverse des matrices sont des opérations continues.

2. On rappelle que $\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Im}\, M$. Soient $M \in X, g \in G_1, h \in G_2$, on poset $N = gMh^{-1}$ un élément de l'orbite de M. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\, N &\Leftrightarrow Nx = 0 \\ &\Leftrightarrow gMh^{-1}x = 0 \\ &\Leftrightarrow Mh^{-1}x = 0 \\ &\Leftrightarrow h^{-1}x \in \mathrm{Ker}\, M \\ &\Leftrightarrow x \in h \,\mathrm{Ker}\, M \end{aligned}$$

Comme $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, les dimensions de $\mathrm{Ker}\, M$ et de $\mathrm{Ker}\, N = h\,\mathrm{Ker}\, M$ sont égales. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \mathrm{Im}\, M = n - \dim \mathrm{Ker}\, M = n - \dim \mathrm{Ker}\, N = \dim \mathrm{Im}\, N$.

3. L'image de M_k est clairement engendrée par les k premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^m$, on a donc $\mathrm{rg}\, M_k = k$. En particulier, M_k et $M_{k'}$ ne sont pas équivalente. Il suffit donc de montrer que toute matrice $M \in X$ est équivalente à une matrice de la forme M_k (elle sera nécessairement unique).
On pose $k := \mathrm{rg}\, M$. Par le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}\, M = n - k$. Soit $F \leqslant \mathbb{K}^n$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, M$. Soit $v_1, \ldots, v_k$ une base de F et $v_{k+1}, \ldots, v_n$ une base de $\mathrm{Ker}\, M$. La famille $u_1 := Mv_1, \ldots, u_k := Mv_k$ est une base de $\mathrm{Im}\, M$. En effet, comme $v_1 \cdots v_n$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$, les images par M des v_i sont générateurs de $\mathrm{Im}\, M$. Or par définition, on a $Mv_i = 0$ pour $i > k$, donc les u_i engendrent $\mathrm{Im}\, M$. Comme $\dim \mathrm{Im}\, M = k$, on déduit que les u_i forment une base de $\mathrm{Im}\, M$.
On complète les u_i en une base $u_1, \ldots, u_m$ de $\mathbb{K}^m$. En posant h (resp. g) la matrice de passage de la base canonique à la base u (resp. de la base canonique à la base u), on obtient bien $gMh^{-1} = M_k$, soit le résultat voulu.

4. On fixe $k \leqslant k' \leqslant m, n$. On considère la suite de matrices

$$A_n := \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} I_{k'-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de matrices de rank $k' - k$ qui converge vers M_k.

5. D'après la question précédente, on a $M_k \in \overline{\mathcal{O}_{k_0}}$ si $k \leqslant k_0$. Comme $\overline{\mathcal{O}_{k_0}}$ est une réunion d'orbites, $M_k \subset \overline{\mathcal{O}_{k_0}}$ entraine $\mathcal{O}_k \subset \overline{\mathcal{O}_{k_0}}$ pour $k \leqslant k_0$. Ainsi, l'ensemble des matrices de rang $\leqslant k_0$ forme un sous-ensemble de $\overline{\mathcal{O}_{k_0}}$. Réciproquement, les matrices de rang $\leqslant k_0$ sont exactement les matrices dont les mineurs d'ordre $r + 1$ sont tous nuls. Comme les mineurs sont des applications polynomiales, leur annulation est une condition fermée. L'ensemble des matrices de rang $\leqslant k_0$ sont donc un fermé qui contient $\mathcal{O}_{k_0}$, d'où l'inclusion réciproque et le résultat.

6. On pose $r = \min(m, n)$. L'adhérence de $\mathcal{O}_k$ est formée des matrices de rang au plus k. Donc $\mathcal{O}_0$ est la seule orbite fermée. Une orbite est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé. Pour $k < r$, le complémentaire de $\mathcal{O}_k$ contient les matrice de rang r, dont l'adhérence est X. Pour $k = r$, le complémentaire de $\mathcal{O}_r$ est formé des matrices de rang $\leqslant r - 1$, c'est à dire de l'adhérence de $\mathcal{O}_{r-1}$, il s'agit en particulier d'un fermé. Si $m = n$, $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{O}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17.
1. Par définition, on a

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Cet espace est de dimension 3, et admet la base suivante

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = ah + be + cf$$

Le déterminant est donné par $\det(ah + be + cf) = a^2 - bc$. En identifiant E et $\mathbb{R}^3$ (avec la base h, e, f), on a

$$a - bc = (a\ b\ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc det est bien une forme quadratique sur E, sa forme polaire est donnée par

$$\varphi((a, b, c), (a', b', c')) = aa' - \frac{1}{2}bc' - \frac{1}{2}b'c.$$

2. On a $e_1 = h$, $e = \frac{1}{2}(e_2 - e_3)$ et $f = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$. La famille e_1, e_2, e_3 est donc génératrice, et c'est une base de E car ce dernier est de dimension 3. Ensuite, on a

$$2\varphi(e_1, e_2) = \varphi(h, e + f) = \varphi(h, e) + \varphi(h, f) = 0 + 0 = 0$$

$$2\varphi(e_1, e_3) = \varphi(h, f - e) = \varphi(h, f) - \varphi(h, e) = 0 - 0 = 0$$

$$4\varphi(e_2, e_3) = \varphi(e + f, f - e) = \varphi(e, f) + \varphi(f, f) - \varphi(e, e) - \varphi(f, e) = \det(f) - \det(e) = 0$$

Donc e_1, e_2, e_3 est une base orthogonale pour φ. Enfin, on a

$$\det(e_1) = -1, \det(e_2) = -1, \det(e_2) = 1$$

donc la signature de det est $(1, 2)$.

3. Soient $g, g' \in G$ et $M \in E$, on a

$$(gg').M = gg'Mg'^{-1}g^{-1} = g.(g'Mg'^{-1}) = g.(g'.M)$$

Comme $1.M = M$ est évident, on a bien une action de groupe de G sur E.

4. Par construction du morphisme $G \to \mathfrak{S}(E)$ associé à l'action précédente, on a

$$\forall g \in G, g \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow (\forall M \in E,\ g.M = M)$$
$$\Leftrightarrow \forall M \in E, gMg^{-1} = M \qquad \Leftrightarrow ghg^{-1} = h,\ geg^{-1} = e,\ gfg^{-1} = f$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on a $g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On a alors

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad + bc & -2ba \\ 2cd & -bc - ad \end{pmatrix}$$

$$geg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

$$gfg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}$$

Si $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a $b^2 = c^2 = 0$ et $a^2 = d^2 = 1$ par les deux dernières équations. La première équation donne alors que a et d ont le même signe. Les seules possibilités sont alors I_2 et $-I_2$. On vérifie facilement que ces deux matrices sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$.

5. Premièrement, on montre que $\varphi(G) \subset \mathrm{GL}(E)$, c'est à dire que l'action de G sur E est linéaire. Soient $M, N \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall g \in G,\ \varphi(g)(\lambda M + \mu N) = g(\lambda M + \mu N)g^{-1}$$
$$= \lambda gMg^{-1} + \mu gMg^{-1}$$
$$\lambda\varphi(g)(M) + \mu\varphi(g)(N)$$

Donc $\varphi(g) \in \mathrm{GL}(E)$ pour tout $g \in G$. Ensuite, on montre que $\varphi(g)$ préserve toujours la forme quadratique det, autrement dit que $\varphi(G) \subset \mathrm{O}(\det)$. Cela découle directement des propriétés de la conjugaison des matrices : pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $M \in E$, on a

$$\det(\varphi(g)(M)) = \det(gMg^{-1}) = \det(g)\det(M)\det(g)^{-1} = \det(M)$$

Comme φ est continu, et comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est connexe, $\varphi(G)$ est connexe et contient Id_E, d'où $\varphi(G) \subset \mathrm{O}_0(\det)$.

6. Par le théorème d'inversion locale, il existe $U \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un voisinage de I_2 tel que $\varphi : U \to \varphi(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, en particulier un homéomorphisme. Comme U est un voisinage de I_2, il contient un ouvert contenant I_2. Cet ouvert est envoyé sur un ouvert par l'homéomorphisme $\varphi_{|U}$. On obtient bien un ouvert de $\varphi(U) \subset \varphi(G)$ qui contient Id_E.

7. Soit $\varphi(g) \in \varphi(G)$. Comme $\mathrm{O}_0(\det)$ est un groupe topologique, la multiplication par $\varphi(g)$ est un homéomorphisme. Soit V un ouvert de $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ contenant Id_E. L'ensemble $\varphi(g)V$ est un ouvert qui contient $\varphi(g)$. Ainsi, $\varphi(G)$ contient un voisinage de chacun de ses points : il s'agit d'un ouvert de $\mathrm{O}_0(\det)$. Ensuite, le complémentaire de $\varphi(G)$ dans $\mathrm{O}_0(\det)$ est la réunion des classes à gauche non triviales de $\mathrm{O}_0(\det)$ modulo $\varphi(G)$. Comme ces classes à gauche sont toutes homéomorphes à $\varphi(G)$, on obtient que le complémentaire de $\varphi(G)$ est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. Ainsi, $\varphi(G)$ est fermé dans $\mathrm{O}_0(\det)$. Comme $\mathrm{O}_0(\det)$ est connexe, le fait que $\varphi(G) \subset \mathrm{O}_0(\det)$ soit ouvert et fermé entraine que $\varphi(G) = \mathrm{O}_0(\det)$.

8. D'après les question précédentes, ceci est une conséquence du théorème d'isomorphisme.

4 Groupes de Lie

Exercice 18. ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ comme groupes de Lie)

1. On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n^2. Il s'agit donc d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n^2$ (il faut doubler la dimension car $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 2).

2. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit donc d'une variété réelle de dimension n^2. De même, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en particulier vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n^2$. Donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une variété réelle de dimension $2n^2$.

3. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et U un ouvert de E. L'espace tangent à U en tout point est E (c'est un sous-espace de E, de même dimension que U, qui a par définition la même dimension que E). Donc les espaces tangents en I_n à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Ce sont toujours des applications polynomiales (où des inverses d'applications polynomiales là où elles sont non nulles). Ces applications sont toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 19. ($\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ comme groupe de Lie)

1. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, il suffit de montrer que la différentielle du déterminant en tout point de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est non nulle. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la différentielle du déterminant en A, appliquée à A, donne $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(A)A) = n\det(A) \neq 0$ d'où le résultat.
L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ étant défini comme l'ensemble des matrices de déterminant 1, et comme le déterminant est une submersion à valeur dans un espace de dimension 1, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $n^2 - 1$. L'espace $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de la différentielle du déterminant en I_n : la différentielle du déterminant en I_n étant tout simplement la trace, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ est simplement l'espace des matrices de trace nulle.

2. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale (quitte à avoir ses valeurs diagonales complexes), on sait que $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$, donc dans ce cas $\det(\exp(D)) = e^{\mathrm{tr}(D)}$ comme annoncé. À présent si A est une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que $PAP^{-1} = D$ est diagonale, on a alors

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(P^{-1}DP)) = \det(P^{-1}\exp(D)P) = \det(\exp(D)) = e^{\mathrm{tr}(D)} = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

Enfin, on conclut par densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on a le résultat voulu.

3. D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(\exp(tM)) = e^{\operatorname{tr}(tM)} = e^{t\operatorname{tr}(M)}$$

D'où le résultat voulu.

Exercice 20. ($\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ comme groupes de Lie)
1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$${}^t f(M) = {}^t({}^t MM) = {}^t M^t({}^t M) = {}^t MM = f(M)$$

donc $f(M)$ est symétrique.

2. Soient X_0 et M deux matrices, on a

$$\begin{aligned} f(X_0+M) &= {}^t(X_0+M)(X_0+M) \\ &= ({}^t X_0 + {}^t M)(X_0+M) \\ &= {}^t X_0 X_0 + {}^t M X_0 + {}^t X_0 M + {}^t MM \\ &= f(X_0) + {}^t M X_0 + {}^t X_0 M + o(M) \end{aligned}$$

D'où le résultat.
Soient maintenant $X_0 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S une matrice symétrique, en posant $M = \frac{1}{2}X_0 S$, on a

$$df_{X_0}(M) = \frac{1}{2}({}^t S^t X_0 X_0 + {}^t X_0 X_0 S) = \frac{1}{2}({}^t S + S) = S$$

Donc $df_{X_0} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ est surjective.

3. L'espace $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété comme préimage de $\{I_n\}$ par la submersion f. Comme f est une submersion à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, un espace de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, on conclut que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On sait que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (défini par $\det \neq -1$), il s'agit donc également d'une sous-variété de même dimension que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Comme les dimensions sont égales, et $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on obtient bien que les espaces tangents sont les mêmes.

5. L'espace tangent $T\mathrm{O}_n(R)_{I_n}$ est donné par le noyau $\ker df_{I_n}$. D'où

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M + M = 0\}$$

soit l'espace des matrices antisymétriques

6. Soit $f : t \mapsto \exp(tM)$ un sous-groupe à un paramètre. Comme f décrit en particulier un chemin continu passant par $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a que f est à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il est à valeurs dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ la composante connexe par arcs de I_n dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On a

$$f(s) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t\exp(sM)\exp(sM) = \exp(s^t M)\exp(sM) = I_n$$

On sait que pour A une matrice réelle, l'inverse de $\exp(A)$ est $\exp(-A)$, donc l'équation ci-dessus devient $\exp(s^t M) = \exp(-sM)$. Ainsi, si M est antisymétrique, le sous-groupe à un paramètre associé est bien à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$