RAPPELS SUR LES ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS - CORRECTION

1 Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

1.1 Définitions

Exercice 1. Commençons par montrer que nous avons au moins affaire à trois formes bilinéaires symétriques. On a $\varphi_i(u,u') = uM_i{}^t u'$, avec respectivement

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Les applications φ_i sont donc bien bilinéaires, et symétriques car les matrices M_i sont symétriques.

On sait ensuite que φ_i est définie positive si et seulement si M_i est définie positive, autrement dit si ses valeurs propres sont strictement positives. Cela montre en particulier que φ_1 est un produit scalaire : les valeurs propres de la matrice diagonale M_1 sont $1, 2$ et 4.

La matrice M_2 n'est pas définie positive : en posant $u := (1,-1,0)$, on a $M_2 u = (-1,1,0) = -u$, donc -1 est une valeur propre négative de M_2. Cela se traduit d'ailleurs en $\varphi_2(u,u) = -3 < 0$.

Déterminer si la matrice M_3 est bien définie positive en calculant χ_{M_3} est pénible. On préfère utiliser la ***réduction de Gauss*** de la forme quadratique $q : u \mapsto \varphi_3(u,u)$. On a

$$\begin{aligned} q(u) : &= x^2 + 6y^2 + az^2 - 4xy - 6xz \\ &= x^2 - 2x(2y+3z) + 6y^2 + az^2 \\ &= (x-(2y+3z))^2 - (2y+3z)^2 + 6y^2 + az^2 \\ &= (x-(2y+3z))^2 + 2y^2 - 9z^2 - 12yz + az^2 \\ &= (x-(2y+3z))^2 + 2(y^2 - 6yz) - 9z^2 + az^2 \\ &= (x-(2y+3z))^2 + 2((y-3z)^2 - 9z^2) - 9z^2 + az^2 \\ &= (x-(2y+3z))^2 + 2(y-3z)^2 + (a-27)z^2 \end{aligned}$$

Donc la forme quadratique q est de signature $(2,1)$ si $a - 27 < 0$ et $(3,0)$ si $a - 27 > 0$. Donc φ_3 donne un produit scalaire si et seulement si $a > 27$.

On pouvait aussi utiliser le critère de Sylvester : il montre que la deuxième matrice ne convient pas (son deuxième mineur diagonal vaut -3), et pour la troisième matrice, le déterminant est $2a - 54$

Exercice 2.
1. Soient $x, y \in E$, on définit la fonction $P : \lambda \mapsto \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$. On a

$$P(\lambda) = \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \varphi(x,x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2\varphi(y,y)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 2, et comme φ est un produit scalaire, on sait que $P(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant de P est donc positif :

$$4\varphi(x,y)^2 - 4\varphi(x,x)\varphi(y,y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \varphi(x,y)^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Les deux termes de cette inégalité étant positifs, on peut passer à la racine pour obtenir l'inégalité voulue.
2. Dans l'inégalité ci-dessus, on a égalité si et seulement si le discriminant de P est nul, i.e il existe un réel λ tel que $P(\lambda) = f(x+\lambda y, x+\lambda y) = 0$. Comme f est un produit scalaire, cela équivaut à $x = -\lambda y$, et à la colinéarité de x et y.

1.2 Bases orthonormées, projection orthogonales

Exercice 3.
1.a) C'est le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux $p_F(u)$ et $u - p_F(u)$:

$$\begin{aligned}\|u\|^2 = \langle u, u\rangle &= \langle u - p_F(u) + p_F(u), u - p_F(u) + p_F(u)\rangle \\ &= \langle u - p_F(u), u - p_F(u)\rangle + \langle p_F(u), p_F(u)\rangle + 2\langle u - p_F(u), p_F(u)\rangle \\ &= \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2\end{aligned}$$

b) On a $\|p_F(u)\|^2 \leqslant \|u\|^2$ par la question précédente, d'où l'inégalité voulue. On a égalité si et seulement si $\|u - p_F(u)\|^2 = 0$, ce qui équivaut à $u = p_F(u)$ et $u \in F$.
c) On utilise l'orthogonalité $p_F(u) \perp (v - p_F(v))$ et $(u - p_F(u)) \perp p_F(v)$:

$$\langle u, v - p_F(v)\rangle = \langle u - p_F(u), v - p_F(v)\rangle = \langle u - p_F(u), v\rangle$$

On en déduit

$$\langle u, v\rangle - \langle u, p_F(v)\rangle = \langle u, v\rangle - \langle p_F(u), v\rangle$$

d'où le résultat voulu.
d) Une base orthogonale adaptée à F correspond au choix de deux bases orthogonales $\{b_i\}$ et $\{b_j^*\}$ de F et de $F^\perp$ respectivement. On a $p_F(b_i) = b_i$ car se cont des vecteurs de F, et $p_F(b_i^*) = 0$ car ce sont des vecteurs de $F^\perp$ (définition du projeté parallèlement à un sous-espace). La matrice en question est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $p = \dim F$.
e) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $v \in F$, comme $v \perp (u - p_F(u))$ et $p_F(u) \perp (u - p_F(u))$, on a

$$\|u - p_F(u)\|^2 = \langle u - p_F(u), u - p_F(u)\rangle = \langle u - p_F(u), u\rangle = \langle u - p_F(u), u - v\rangle \leqslant \|u - p_F(u)\| \, \|u - v\|$$

Si $u \notin F$ (ce qui est le seul cas non trivial), on peut diviser par $\|u - p_F(u)\|$ pour obtenir l'inégalité voulue.
2.a) Par définition, le vecteur $f(a, b) - y$ est donné par $(ax_1 + b - y_1, \dots, ax_n + b - y_n)$, donc

$$\|f(a, b) - y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

d'où le résultat voulu.
b) On projette $\underline{y}$ sur le plan $P := \mathrm{Vect}(\underline{x}, \underline{1})$, et on a $a\underline{x} + b\underline{1} = p_P(\underline{y})$. Donc

$$a\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle + b\langle \underline{1}, \underline{x}\rangle = \langle p_P(\underline{y}), \underline{x}\rangle = \langle \underline{y}, p_P(\underline{x})\rangle = \langle \underline{y}, \underline{x}\rangle$$

$$a\langle \underline{1}, \underline{x}\rangle + b\langle \underline{1}, \underline{1}\rangle = \langle \underline{1}, a\underline{x} + b\underline{1}\rangle = \langle \underline{1}, \underline{y}\rangle$$

c) La question précédente nous donne un système linéaire, dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle & \langle \underline{1}, \underline{x}\rangle \\ \langle \underline{1}, \underline{x}\rangle & \langle \underline{1}, \underline{1}\rangle \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$\frac{1}{n\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle - \langle \underline{1}, \underline{x}\rangle^2} \begin{pmatrix} n & \langle \underline{1}, \underline{x}\rangle \\ \langle \underline{1}, \underline{x}\rangle & \langle \underline{x}, \underline{x}\rangle \end{pmatrix}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 4.
1.a) Pour $i \in [\![1,d]\!]$, on pose $V_i := \mathrm{Vect}(b_1,\ldots,b_d)$ et $V_i' = \mathrm{Vect}(b_1^{\#},\ldots,b_d^{\#})$. On montre le par récurrence sur i que $V_i = V_i'$ pour tout $i \in [\![1,d]\!]$. Le cas $i=1$ est immédiat : on a $b_1^{\#} = b_1$, donc $V_1 = V_1'$ par définition. Ensuite, si $V_{i-1} = V_{i-1}'$ pour un certain $i \in [\![2,d]\!]$, on cherche à montrer qu'alors $V_i = V_i'$.

On a que $b_i^{\#} = b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} b_j^{\#}$ est une combinaison linéaire de b_i et des b_j pour $j<i$, d'où

$$b_i^{\#} \in V_{i-1}' + \mathrm{Vect}(b_i) = V_{i-1} + \mathrm{Vect}(b_i) = V_i.$$

Ainsi, on a $V_i' = V_{i-1}' + \mathrm{Vect}(b_i^{\#}) = V_{i-1} + \mathrm{Vect}(b_i^{\#}) \subset V_{i-1} + V_i = V_i$ par hypothèse de récurrence. Réciproquement, on a également $b_i = b_i^{\#} + \sum_{j<i} a_{i,j} b_j^{\#}$, donc $b_i \in V_i'$ et $V_i \subset V_i'$.

Pour $i = d$, on sait que V_d est de dimension d (car engendré par une famille libre de cardinal d), donc V_d' est de dimension d, et la famille $(b_1^{\#},\ldots,b_d^{\#})$ est donc libre. En particulier aucun des $b_i^{\#}$ n'est nul.
b) On pose $b_1^* := b_1$. On suppose ensuite construits les $b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*$. En appliquant la question précédente aux familles $b_1,\ldots,b_{i-1}$ et $b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*$, on trouve que $b_j^* \neq 0$ pour $j<i$. Cela implique que les $\mu_{i,j}$ sont bien définis (on peut diviser par $\langle b_j^*, b_j^*\rangle \neq 0$), on peut donc alors poser $b_i^* := b_i - \sum_{j<i} \mu_{i,j} b_j^*$ et poursuivre la construction.
c) On montre par récurrence sur i que, pour tout $i[\![1,d]\!]$, la famille $(b_1^*,\ldots,b_i^*)$ respecte la propriété (P3). L'assertion est vide pour $i=1$. Si elle est vraie au rang $i-1$, on doit montrer que $\langle b_k^*, b_i^*\rangle = \langle b_i^*, b_k^*\rangle = 0$ pour $k<i$. On a

$$\begin{aligned}\langle b_i^*, b_k^*\rangle &= \left\langle b_i - \sum_{j<i} \mu_{i,j} b_j^*, b_k^* \right\rangle \\ &= \langle b_i, b_k^*\rangle - \sum_{j<i} \mu_{i,j} \langle b_j^*, b_k^*\rangle \\ &= \langle b_i, b_k^*\rangle - \mu_{i,k} \langle b_k^*, b_k^*\rangle = 0\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

2. On confond b_i avec le vecteur colonne associé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit matriciel ${}^t b_i b_j$ est en fait le produit scalaire $\langle b_i, b_j\rangle$. Les coefficients de la matrice ${}^tBB$ sont donc les $\langle b_i, b_j\rangle$.

On considère la matrice B^* dont les colonnes sont les b_i^*. Comme la famille (b_i^*) est orthogonale, la matrice ${}^tB^*B^*$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les $\|b_i^*\|_2^2$. On a donc $\det({}^tB^*B^*) = \prod_{i=1}^d \|b_i^*\|_2^2$. Il suffit ainsi pour conclure de montrer que ${}^tB^*B^*$ et ${}^tBB$ ont le même déterminant.

On sait que, pour tout i, $b_i = b_i^* + \sum_{j<i} \mu_{i,j} b_j^*$. Autrement dit la i-ème colonne de B s'écrit comme combinaison linéaire des i-premières colonnes de B^*, les coefficients étant respectivement $\mu_{i,1},\ldots,\mu_{i,i-1},1$. Au final on a $B^*A = B$, où A est la matrice triangulaire supérieure dont le coefficient i,j est $\mu_{i,j}$ si $j<i$, 1 si $i=j$ et 0 si $j>i$. On a

$${}^tBB = {}^tA{}^tB^*B^*A$$

et donc ces matrices ont même déterminant (car $\det(A) = 1$).

3. Si $d = n$, alors $\det {}^tBB = \det B^2$. De plus, $b_i = b_i^* + \sum_{j<i} \mu_{i,j} b_j^*$, donc l'orthogonalité de la base b_i^* donne

$$\|b_i\|^2 = \|b_i^*\|^2 + \sum_{j<i} \mu_{i,j}^2 \left\|b_j^*\right\|^2 \geqslant \|b_i^*\|^2$$

On a donc

$$|\det B| = (\det {}^tBB)^{1/2} = \prod_{i=1}^d \|b_i^*\| \geqslant \prod_{i=1}^d \|b_i\|$$

Exercice 5.
Comme on est avec le produit scalaire usuel, le vecteur normal au plan F est donné par $n = (1,-2,1)$. On pose $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $(a,b,c) := p_F(\varepsilon_1)$, on a $\varepsilon_1 - p_F(\varepsilon_1) = (1-a,-b,-c)$ doit être colinéaire à n. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\lambda, -2\lambda, \lambda) = (1-a,-b,-c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1-\lambda \\ b = 2\lambda \\ c = -\lambda \end{cases}$$

Le fait que (a,b,c) soit dans F devient donc

$$1 - \lambda - 2(2\lambda) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Le projeté de ε_1 sur F est donc $\frac{1}{6}(1,-2,1)$.

On pose $(a,b,c) := p_F(\varepsilon_2)$, on a $\varepsilon_2 - p_F(\varepsilon_2) = (-a,1-b,-c)$ doit être colinéaire à n. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\lambda, -2\lambda, \lambda) = (-a,1-b,-c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\lambda \\ b = 1+2\lambda \\ c = -\lambda \end{cases}$$

Le fait que (a,b,c) soit dans F devient donc

$$-\lambda - 2(1+2\lambda) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$$

Le projeté de ε_2 sur F est donc $\frac{-1}{3}(1,-2,1)$.

On pose $(a,b,c) := p_F(\varepsilon_3)$, on a $\varepsilon_3 - p_F(\varepsilon_3) = (-a,-b,1-c)$ doit être colinéaire à n. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\lambda, -2\lambda, \lambda) = (-a,-b,1-c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\lambda \\ b = 2\lambda \\ c = 1-\lambda \end{cases}$$

Le fait que (a,b,c) soit dans F devient donc

$$-\lambda - 2(2\lambda) + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Le projeté de ε_3 sur F est donc $\frac{1}{6}(1,-2,1)$.
La matrice de p_F dans la base canonique est donc

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Les vecteurs v_i organisés en colonne donnent la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de déterminant $2 \neq 0$, donc les v_i forment une base de $\mathbb{R}^3$. On applique l'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

- $v_1^* = v_1 = (1,0,1)$
- Pour v_2^*, on calcule

$$\mu_{2,1} = \frac{\langle v_2, v_1^* \rangle}{\langle v_1^*, v_1^* \rangle} = \frac{2}{2} = 1$$

  Et $v_2^* = v_2 - \mu_{2,1} v_1^* = (1,1,-1)$.

- Pour v_3^*, on calcule

$$\mu_{3,1} = \frac{\langle v_3, v_1^* \rangle}{\langle v_1^*, v_1^* \rangle} = \frac{2}{2} = 1, \quad \mu_{2,1} = \frac{\langle v_3, v_2^* \rangle}{\langle v_2^*, v_2^* \rangle} = \frac{1}{3}$$

Et $v_3^* = v_3 - v_1^* - \frac{1}{3} v_2^* = (-1/3, 2/3, 1/3)$

En renormalisant, on obtient la base orthonormée

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1) \end{cases}$$

3. On pose $v_1^* = (1,0,1)$. Ensuite, on a $\mu_{2,1} = \frac{4}{2} = 2$, donc $v_2^* = (0,1,0)$. Ensuite, on a $\mu_{3,1} = 1$ et $\mu_{3,2} = 1$, donc $v_3^* = 0$. L'espace F est donc de dimension 2, et une base orthonormée en est donnée par $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ et $(0,1,0)$.

Exercice 6.

1. Si la famille S est orthogonale, la matrice des $\langle u_i, u_j \rangle$ est diagonale, et ses coefficients diagonaux sont (comme toujours) les $\|u_i\|^2$. Dans ce cas, $G(S)$ est le produit des $\|u_i\|^2$.

2. On pose $M(S)$ la matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs de S (on note C_i sa i-ème colonne, avec donc $C_i = u_i$ en tant que vecteur de $\mathbb{R}^n$). On a toujours $G(S) = \det({}^t M(S) M(S))$. Considérons une combinaison linéaire

$$u_i' := u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j} u_j$$

Et considérons la famille $S' = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1}, \ldots, u_p)$. Nous cherchons à montrer que $G(S) = G(S')$. On peut passer de $M(S)$ à $M(S')$ en effectuant la transformation de Gauss $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j} C_j$. Cette transformation correspond à la multiplication (à droite) de $M(S)$ par la matrice A, dont la i-ème colonne a pour j-ème coefficient $\lambda_{i,j}$ (avec la convention $\lambda_{i,i} = 1$). La j-ème colonne de A (pour $j \neq i$) est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & \lambda_{i,1} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda_{i,p} & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$$

En développant le déterminant de A par rapport à la i-ème ligne, on s'aperçoit que $\det A = \pm 1$. Or, on a

$$\begin{aligned} G(S') &= \det({}^t M(S') M(S)) \\ &= \det({}^t (M(S)A) M(S)A) \\ &= \det({}^t A {}^t M(S) M(S) A) \\ &= \det({}^t M(S) M(S)) = G(S) \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

3. Le procédé de Gram-Schmidt ne fait qu'ajouter successivement à des vecteurs de S des combinaisons linéaires des autres. Chaque étape du procédé préserve donc le déterminant de Gram, d'où le résultat.

4. On pose $F := \mathrm{Vect}(S)$ et $u' := p_F(u)$ le projeté orthogonal de u sur F. On sait que u' est combinaison linéaire des u_i (car $u' \in F$ par définition). On peut donc (d'après la question 2) remplacer T par $T' = (u_1, \ldots, u_p, u - p_F(u))$. Or, on sait que $u - p_F(u) \in F^\perp$, donc la matrice de Gram est de la forme

$$\begin{pmatrix} {}^t M(S) M(S) & 0 \\ 0 & \|u - p_F(u)\|^2 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est donc $G(T') = G(T) = G(S)\,\|u - p_F(u)\|^2$. Comme le projeté orthogonal réalise la distance avece le sous-espace, on a bien

$$\frac{G(T)}{G(S)} = \|u - p_F(u)\|^2 = d(u,F)^2$$

5.a) Par la question 3, on peut supposer que la famille S' est orthogonale. On a alors

$$G(S) = \prod_{i=1}^{p} \|u_i\|^2 > 0 \Leftrightarrow G(S) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin S$$

Soit le résultat voulu. Pour $p = 2$, la matrice de Gram a la forme

$$A := \begin{pmatrix} \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \|u_2\| \end{pmatrix}$$

On a $\det(A) > 0 \Leftrightarrow \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 > \langle u_1, u_2\rangle^2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et le cas d'égalité en particulier).
b) On pose $S := (u_1^*, \ldots, u_p^*)$ la famille obtenue par orthogonalisation de Gram-Schmidt. On sait que

$$G(S) = G(S') = \|u_1^*\|^2 \cdots \left\|u_p^*\right\|^2$$

On prouve par récurrence que, dans l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on a $\|u_i^*\| \leqslant \|u_i\|$ avec égalité seulement si $u_i^* = u_i$. On a toujours $u_1 = u_1^*$, l'initialisation est donc immédiate. Ensuite, on a

$$u_i^* = u_i - \sum_{j<i} \mu_{i,j} u_j^*$$

Avec $\mu_{i,j} = \frac{\langle u_i, u_j^*\rangle}{\langle u_j^*, u_j^*\rangle}$ Comme les u_i^* sont orthogonaux, on a $\|u_i\|^2 = \|u_i^*\|^2 + \sum_{j<i} |\mu_{i,j}| \left\|u_j^*\right\|^2 \geqslant \|u_i^*\|^2$, avec égalité si et seulement si les $\mu_{i,j}$ sont tous nuls, autrement dit si u_i est déjà orthogonal aux u_j^* pour $j \leqslant i$, auquel cas $u_i = u_i^*$.

1.3 Endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle

Exercice 7. On commence par considérer une base de E, sur laquelle on applique le procédé de Gram-Schmidt avec normalisation, de sorte à obtenir une base orthonormée de (E, φ), que l'on note $u_1, \ldots, u_n$. Envoyer u_i sur le i-ème vecteur de base canonique de $\mathbb{R}^n$ donne un isomorphisme $f : E \to \mathbb{R}^n$, dont il reste à montrer qu'il préserve le produit scalaire.
Soient $x, y \in E$, on pose

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \varphi(u_i, u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Or, l'isomorphisme f envoie x sur $(x_1, \ldots, x_n)$ et y sur $(y_1, \ldots, y_n)$, donc $\varphi(x,y)$ est bien égal à $\langle f(x), f(y)\rangle$.
L'application

$$\begin{array}{ccc} O(E) & \longrightarrow & O(\mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & f \circ u \circ f^{-1} \end{array}$$

Induit un isomorphisme, et il est facile de voir que $O(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $O_n(\mathbb{R})$ (en prenant la matrice dans la base canonique).

Exercice 8.

1. En prenant $y=0$ dans la conservation des distances, on obtient

$$\forall x \in E,\ \|f(x)-f(0)\| = \|f(x)\| = \|x\|$$

Autrement dit f conserve la norme. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2 &\Leftrightarrow \langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle \\ &\Leftrightarrow \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \\ &\Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

donc f préserve le produit scalaire.

2. Soit $t \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle z, f(t)\rangle &= \langle f(\lambda x+\mu y), f(t)\rangle - \lambda\langle f(x), f(t)\rangle - \mu\langle f(y), f(t)\rangle \\ &= \langle \lambda x+\mu y, t\rangle - \lambda\langle x, t\rangle - \mu\langle y, t\rangle = 0\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\langle z, z\rangle &= \langle f(\lambda x+\mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y), f(\lambda x+\mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\rangle \\ &= 0 - \lambda 0 - \mu 0 = 0\end{aligned}$$

Donc $z=0$ car sa norme est nulle, ainsi, f est linéaire et il s'agit d'une isométrie vectorielle.

Exercice 9.

1.a) C'est le principe d'une valeur propre : si x est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$, qui est donc globalement invariante par f.
b) On pose $\lambda = x+iy$ la forme algébrique de λ. On a

$$\begin{aligned}AZ = \lambda Z &\Leftrightarrow A(U+iV) = (x+iy)(U+iV) \\ &\Leftrightarrow AU + iAV = xU - yV + i(yU+xV) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AU = xU - yV \\ AV = yU + xV \end{cases}\end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.
c) Le polynôme caractéristique de f admet peut-être des racines réelles, mais il admet toujours à minima des racines complexes, on a le résultat voulu par les deux questions précédentes (dans le second cas, l'espace $\mathrm{Vect}(U,V)$ est f-invariant).

2. Cela découle du fait que f préserve le produit scalaire : soit $y \in F^\perp$, on doit montrer que $f(y)$ est orthogonal à F. Soit donc $x \in F$, on sait que $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont dans F par hypothèse, donc

$$\langle x, f(y)\rangle = \left\langle f^{-1}(x), y\right\rangle = 0$$

donc $f(y) \in F^\perp$, qui est alors f-stable.

3.a) Soit $u=(u_1,u_2)$ une base orthonormée de E. On a $f(u_1) = au_1 + bu_2$, avec $a^2+b^2 = 1 = \|u_1\|^2$ car f est une isométrie. Il existe donc θ tel que $a=\cos(\theta)$ et $b=\sin(\theta)$. Comme u_2 est orthogonal à u_1, $f(u_2)$ doit être orthogonal à $f(u_1)$, donc de la forme $\lambda(-bu_1+au_2)$. La matrice de f dans la base (u_1,u_2) est de la forme

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\lambda\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \lambda\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est $\lambda = 1$, donc la matrice de f a bien la forme voulue. De plus, la trace de f est $2\cos(\theta)$, ce qui détermine totalement l'angle θ.
b) On commence le même raisonnement que ci-dessus. On arrive a la forme matricielle

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, il existe donc une base dans laquelle la matrice de f a la forme voulue. Comme f préserve le produit scalaire, la base de diagonalisation est orthogonale, et il suffit de renormaliser pour obtenir une base orthonormée.

4. La question précédente nous a permis de montrer le résultat pour les cas $n = 1$ et $n = 2$. D'après la question 1, on peut décomposer E en somme directe $F \oplus F^\perp$, avec F de dimension 1 ou 2. Par hypothèse de récurrence, f se décompose sous la forme voulue sur F et $F^\perp$, et comme des espaces sont orthogonaux et f préserve le produit scalaire, on a bien la forme désirée.

1.4 Endomorphisme adjoint, endomorphisme symétrique

Exercice 10.
1. On considère l'application $E \to E^*$ définie par $x \mapsto \langle -, x \rangle$. Il s'agit d'une application linéaire, injective car le produit scalaire est non dégénéré. Il s'agit donc d'un isomorphisme d'espaces vectoriels (on est en dimension finie). Considérons à présent l'application

$$f_v : u \mapsto \langle f(u), v \rangle$$

Il s'agit d'une forme linéaire sur E, il existe donc un unique vecteur, que l'on note $f^*(v)$, tel que $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle$ pour tout $u \in E$. L'application $v \mapsto f^*(v)$ est linéaire par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\langle u, f^*(\lambda v_1 + \mu v_2) \rangle &= \langle f(u), \lambda v_1 + \mu v_2 \rangle \\
&= \lambda \langle f(u), v_1 \rangle + \mu \langle f(u), v_2 \rangle \\
&= \lambda \langle u, f^*(v_2) \rangle + \mu \langle u, f^*(v_2) \rangle \\
&= \langle u, \lambda f^*(v_1) + \mu f^*(v_2) \rangle
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $u \in E$, on a bien $f^*(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f^*(v_1) + \mu f^*(v_2)$.

2. Le choix d'une base orthonormée nous permet de nous ramener à la situation $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Notons U et V les coordonées de U et V dans la base orthonormée choisie. Le produit scalaire est donné par

$$\langle f(u), v \rangle = {}^t(AU)V = {}^tU {}^tAV$$

Donc les coordonées de $f^*(v)$ dans la base orthonormée choisie sont celles du vecteur ${}^tAV$, autrement dit la matrice de f^* dans la base choisie est ${}^tA$.

3. Ce sont de brutales vérifications, soient $u, v \in E$

$$\langle u, f^{**}(v) \rangle = \langle f^*(u), v \rangle = \langle v, f^*(u) \rangle = \langle f(v), u \rangle = \langle u, f(v) \rangle$$

$$\langle u, (f+g)^*(v) \rangle = \langle (f+g)(u), v \rangle = \langle f(u), v \rangle + \langle g(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) + g^*(v) \rangle$$

$$\langle u, (\lambda f)^*(v) \rangle = \langle \lambda f(u), v \rangle = \lambda \langle f(u), v \rangle = \langle u, \lambda f^*(v) \rangle$$

$$\langle u, (gf)^*(v) \rangle = \langle gf(u), v \rangle = \langle f(u), g^*(v) \rangle = \langle u, f^* g^*(v) \rangle$$

Exercice 11.
1.a) Soit $\lambda = a + ib$ une valeur propre complexe de f et soit $U + iV$ un vecteur propre complexe de f. On sait que $AU = aU - bV$ et $AV = bU + aV$, donc

$$\langle AU, V \rangle = a \langle U, V \rangle - b \|V\|^2 = b \|U\|^2 + a \langle U, V \rangle = \langle U, AV \rangle$$

Donc $b(\|U\|^2 + \|V\|^2) = 0$ et $b = 0$, λ est donc réelle.
b) Soit $y \in \mathbb{F}^\perp$, on doit montrer que $f(y)$ est orthogonal à F. Soit donc $x \in F$, on a

$$\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = 0$$

car $f(x) \in F$ par hypothèse. On a bien que $F^\perp$ est f-stable.
c) Soient λ et μ deux valeurs propres (réelles d'après la question a)) distinctes de f. Et soient x, y deux vecteurs propres (non nuls) pour ces valeurs propres respectivement. On a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle f(x), y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x, f(y)\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle x, y\rangle$$

Comme $\frac{\mu}{\lambda} \neq 1$, cela entraîne $\langle x, y\rangle = 0$. Les espaces propres de f sont donc orthogonaux.
d) On procède par récurrence sur la dimension de n. Premièrement, f admet une valeur propre réelle λ (f admet une valeur propre complexe, qui est en fait réelle par la question 1.a)). On décompose $E = E_\lambda \perp E_\lambda^\perp$. On sait que f est encore symétrique sur $E_\lambda^\perp$, on peut donc trouver une b.o.n de $E_\lambda^\perp$ sur laquelle f se diagonalise. D'où le résultat. (la base de diagonalisation est orthogonale car les espaces propres de f sont orthogonaux, il suffit ensuite de renormaliser).

2. C'est le résultat de la question précédente appliquée à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (en effet, une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une b.o.n).

Exercice 12.
1. On a bien affaire à une application bilinéaire par bilinéarité du produit de matrices (et linéarité de la trace). La symétrie découle de l'invariance de la trace par transposée, mais comme on ne manipule pas des matrices carrées, on va être un peu prudent. Le i-ème terme diagonal de ${}^tXY$ est

$$\sum_{k=1}^{p} x_{k,i}y_{k,i}$$

Qui est égal au i-ème terme diagonal de ${}^tYX$, d'où la symétrie de $\langle ., .\rangle$. Il reste ensuite à établir que $\langle ., .\rangle$ est défini positif. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{tr}({}^tXX) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} x_{i,k}^2$$

Il s'agit de la somme des carrés des coefficients de X, qui est positive, et nulle si et seulement si tous les coefficients de X sont nuls.

2. Soient $X, Y \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle f(X), Y\rangle &= \mathrm{tr}({}^t(AX - XB)Y)\\ &= \mathrm{tr}({}^tX{}^tAY - {}^tB{}^tXY)\\ &= \mathrm{tr}({}^tX{}^tAY - {}^tXY{}^tB)\\ &= \left\langle X, {}^tAY - Y{}^tB\right\rangle\end{aligned}$$

3. On tire de la quesion précédente que f est autoadjoint si et seulement si $(A - {}^tA)X = X(B - {}^tB)$

Exercice 13.
1. On sait que l'application $y \mapsto \langle -, y\rangle$ fournit un isomorphisme f entre E et E^*. Comme φ est bilinéaire, l'application $y \mapsto \varphi(-, y)$ est une application linéaire de E vers E^*, que l'on compose par f^{-1} pour obtenir u. En effet $f^{-1}(\varphi(-, y))$ est bien l'unique vecteur $u(y)$ tel que $f(u(y)) = \langle -, u(y)\rangle = \varphi(-, y)$.

2. Par symétrie de φ, on a

$$\langle u(x), y\rangle = \langle y, u(x)\rangle = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = \langle x, u(y)\rangle$$

d'où $u = u^*$.

3. Il existe par le théorème spectral une base orthonormée de diagonalisation pour u. Soient e_i, e_j dans cette base avec $j \neq i$. Il existe λ tel que $u(e_j) = \lambda e_j$, on a alors

$$\varphi(e_i, e_j) = \lambda\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

car e_i et e_j sont orthogonaux pour $\langle ., .\rangle$. La matrice φ sera donc diagonale dans cette base.

Exercice 14.
On commence par calculer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5-X & 4 & -2 \\ 4 & 5-X & 2 \\ -2 & 2 & 8-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 9-X & 9-X & 0 \\ 4 & 5-X & 2 \\ -2 & 2 & 8-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 9-X & 0 & 0 \\ 4 & 1-X & 2 \\ -2 & 4 & 8-X \end{vmatrix} \\
&= (9-X)((1-X)(8-X)-8) \\
&= (9-X)(8-9X+X^2-8) \\
&= -X(9-X)^2
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donc $X(X-9)^3$. Le calcul des espaces propres nous donne

$$E_0 = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_9 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Il suffit pour conclure d'appliquer Gram-Schmidt avec renormalisation sur la base obtenue, on trouve la base

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dans laquelle la matrice A correspond à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c, d les coordonées d'un vecteur x dans cette base orthonormée. On a

$$\frac{q(x)}{\langle x, x\rangle} = \frac{9(b^2+c^2+d^2)}{a^2+b^2+c^2+d^2} \leqslant 9$$

avec égalité dans le cas où $a = 0$.

1.5 Décomposition polaire

Exercice 15.
1. Comme f est un polynôme en g, on a que f et g commutent. Ces endomorphismes sont donc codiagonalisables. Dans une base de codiagonalisation, dire que $g^2 = f$ revient à dire que les éléments diagonaux de la matrice de g sont les racines de ceux de f, d'où le résultat.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée dans laquelle la matrice M de f est diagonale. Comme les éléments diagonaux λ_i de M sont des réels positifs, ils admettent une unique racine réelle. On pose alors g l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $\operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$. On a bien une racine carrée de f, et cette racine est unique d'après la question précédente.

3. On diagonalise A dans une base orthonormée : $PAP^{-1} = D$, la matrice $P^{-1}\sqrt{D}P$ est la racine carrée symétrique positive de A.

Exercice 16.
1.a) On commence par noter que ${}^tMM$ est symétrique car

$$ {}^t({}^tMM) = {}^tM{}^{tt}M = {}^tMM $$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$ \langle {}^tMMx, x \rangle = \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|^2 $$

qui est positif ou nul, et strictement positif si $x \neq 0$ (car $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). Donc ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Pour montrer que O est orthogonale, on calcule

$$ {}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_N $$

car S est symétrique (donc S^{-1} également) d'où le résultat.

2. Si $OS = O'S' = M$, on a ${}^tMM = S^2 = S'^2$, l'unicité des racines symétriques positives nous donne alors $S = S'$, et donc $O = MS^{-1} = MS'^{-1} = O'$.

Exercice 17. On a

$$ {}^tM(z)M(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = |z|^2 I_2 $$

La racine carrée de cette matrice est $|z|I_2$, et on a

$$ |z|^{-1}M(z) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \frac{-\mathrm{Im}(z)}{|z|} \\ \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} & \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} $$

où θ est un argument de z. La décomposition polaire d'une matrice $M(z)$ correspond alors à la décomposition polaire classique $z = |z|e^{i\theta}$.

Exercice 18.
1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est défini comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$. Il s'agit donc d'un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.a) La quantité $\sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$ correspond au carré scalaire de la i-ème ligne de A, qui est le i-ème terme diagonal de la matrice ${}^tAA = I_n$, donc égal à 1.
b) La question précédente nous apprend en particulier que toutes les lignes de A ont norme euclidienne égale à 1, leur norme $\|.\|_1$ est donc majorée par 1 également. Donc le max $\|A\|_\infty$ de ces normes est également majoré par 1.

3. C'est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par les questions précédentes (borné pour la norme $\|.\|_\infty$, mais ça n'a pas d'importance car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie).

4.a) Comme $O_n(\mathbb{R}) \subset G$, on a $S = O^{-1}M \in G$, et $P^{-1}SP = D \in G$. Comme G est un groupe, on a $D^p \in G$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Or comme D est diagonale, on a $\|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^2)} = \rho(D)$ et $\|D^p\|_2 = \|D\|_2^p$. Si cette norme est différente de 1, on obtient une suite non bornée en considérant $(D^p)_{p\in\mathbb{N}}$ ou $(D^p)_{p\in-\mathbb{N}}$, ce qui vient contredire le fait que G est compact (donc borné).
b). D'après la question précédente, $M = O$ et donc $G \subset O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19. On sait qu'il s'agit d'une application bijective d'après les exercices précédents, et continue par continuité du produit matriciel. Il reste à montrer que sa réciproque est continue. Soient (O_p) et (S_p) deux suites telles que (O_pS_p) converge vers OS. Soit O' une valeur d'adhérence de (O_p), limite de la sous-suite (O_{p_k}). On a que (S_{p_k}) converge vers $O'^{-1}M = S'$, qui est symétrique définie positive. Comme $M = O'S'$, l'unicité de la décomposition polaire donne $O = O'$ et $S = S'$. La suite (O_p) n'a alors qu'une seule valeur d'adhérence O. Elle converge alors vers O comme suite d'un compact, d'où le résultat.

2 Espaces hermitiens

2.1 Definitions

Exercice 20. On a

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_i e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} f(e_i, e_j) = {}^t X A \overline{Y}$$

Exercice 21. On prend $x = (1, 2i)$, et on a $\varphi(x,x) = 1^2 + 4i^2 = -3$

Exercice 22. 1. La forme f_1 n'est pas sesquilinéaire : pour $x = (1-i, 0)$, $y = (1,0)$, on a

$$f_1(x, \lambda y) = 2\lambda = \lambda f_1(x,y) \neq \overline{\lambda} f_1(x,y)$$

par exemple pour $\lambda = i$.
2. La forme f_2 est sesquilinéaire et donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elle n'est pas hermitienne car sa matrice n'est pas hermitienne.
3. La forme f_3 est sesquilinéaire, hermitienne et donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

4. La forme f_4 est sesquilinéaire et donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas hermitienne (son coefficient diagonal i n'est pas réel).
5. et 6 sont à valeurs strictement réelles, ce qui n'est pas possible de la part d'une forme sesquilinéaire.

Exercice 23.
1. On a par définition

$$\mathrm{Re}(f)(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + \overline{f(x,y)}) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(x,y) = \frac{1}{2i}(f(x,y) - f(y,x))$$

Premièrement, $\mathrm{Re}(f)$ est symétrique, et $\mathrm{Im}(f)$ est antisymétrique par définition. Il suffit donc de vérifier que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont linéaires par rapport à leur première variable. Soient $x, x', y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f)(x+x',y) &= \frac{1}{2}\left(f(x+x',y) + f(y,x+x')\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(x',y) + f(y,x) + f(y,x')\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x',y) + f(y,x')\right) \\
&= \mathrm{Re}(f)(x,y) + \mathrm{Re}(f)(x',y)
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (car on regarde la structure de $\mathbb{R}$-ev).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(f)(\lambda x,y) &= \frac{1}{2}\left(f(\lambda x,y) + f(y,\lambda x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda f(x,y) + \overline{\lambda} f(y,x)\right) \\
&= \frac{2\lambda}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right) \\
&= \lambda \mathrm{Re}(f)(x,y)
\end{aligned}$$

On applique le même raisonnement (avec les mêmes calculs) pour $\mathrm{Im}(f)$

2. Les formes $q_1 : \mathrm{Re}(f)(x,x)$ et $q_2 : \mathrm{Im}(f)(x,x)$ sont données par

$$q_1(x) = f(x,x), \quad q_2(x) = 0$$

donc q_1 est positive et définie, autrement dit $\mathrm{Re}(f)$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive : c'est un produit scalaire.

Exercice 24.
1. Go le faire en plusieurs fois :

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x-y) &= f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) \\ &= f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x) - f(x,x) - f(y,y) + f(x,y) + f(y,x) \\ &= 2f(x,y) + 2f(y,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x+iy) - q(x-iy) &= 2f(x,iy) + 2f(iy,x) \\ &= -2if(x,y) + 2if(y,x) \\ &= 2i(f(y,x) - f(x,y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + i(q(x+iy) - q(x-iy))) &= \frac{2f(x,y) + 2f(y,x) - 2(f(y,x) - f(x,y))}{4} \\ &= \frac{4f(x,y)}{4} = f(x,y) \end{aligned}$$

2. On note que, comme f est sesquilinéaire, on a $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$. Si f est hermitienne, $q(x) = f(x,x) = \overline{f(x,x)}$ est réel. Réciproquement, si q est à valeurs réelles, on a

$$\mathrm{Re}(f(x,y)) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f(x,y)) = \frac{1}{4}\left(q(x+iy) - q(x-iy)\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f(y,x)) &= \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(y-x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) \\ &= \mathrm{Re}(f(x,y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Im}(f(y,x)) &= \frac{1}{4}\left(q(y+ix) - q(y-ix)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(q(iy-x) - q(ix+y)\right) \\ &= -\mathrm{Im}(f(x,y)) \end{aligned}$$

D'où $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ et f est hermitienne.

2.2 C'est tout pareil qu'euclidien

Exercice 25. On pose $\alpha := \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$. On a

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle = |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle \lambda x + \alpha y, \lambda x + \alpha y \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \geqslant 0$$

Et c'est un polynôme réel à coefficients réels, on a le résultat en regardant son discriminant :

$$\langle x, \alpha y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle \alpha y, \alpha y \rangle = \overline{\alpha}^2 \alpha^2 - |\alpha|^2 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow |\alpha|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Exercice 26. Premièrement, il s'agit bien d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ne s'annulant que sur le vecteur nul, et homogène. Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, et $\mathrm{Re}(\alpha) \leqslant |\alpha|$, on a

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où le résultat.

Exercice 27. Soit λ une valeur propre complexe de f. Si x est un vecteur propre pour λ, on a $\|f(x)\| = |\lambda|\|x\| = \|x\|$ car f est une isométrie, donc $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Comme dans le cas euclidien, on a que f préserve l'orthogonalité, on conclut donc par la même récurrence que dans le cas euclidien.

Exercice 28.
On commence par montrer que les valeurs propres de f sont réelles : Si λ est une valeur propre, et x un vecteur propre, on a

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

Et donc $\lambda = \overline{\lambda}$.

On montre ensuite que, si $F \leqslant E$ est f-stable, il en va de même de $F^{\perp}$. Soit $y \in \mathbb{F}^{\perp}$, on doit montrer que $f(y)$ est orthogonal à F. Soit donc $x \in F$, on a

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = 0$$

car $f(x) \in F$ par hypothèse. On a bien que $F^{\perp}$ est f-stable.
Ensuite, les espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux : Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Et soient x, y deux vecteurs propres (non nuls) pour ces valeurs propres respectivement. On a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \lambda x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle f(x), y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x, f(y)\rangle = \frac{\overline{\mu}}{\lambda}\langle x, y\rangle$$

Comme $\frac{\overline{\mu}}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} \neq 1$, cela entraîne $\langle x, y\rangle = 0$. Les espaces propres de f sont donc orthogonaux.
On montre ensuite par récurrence que f est diagonalisable (sur une b.o.n). Premièrement, f admet une valeur propre λ. On décompose $E = E_\lambda \perp E_\lambda^{\perp}$. On sait que f est encore hermitien sur $E_\lambda^{\perp}$, on peut donc trouver une b.o.n de $E_\lambda^{\perp}$ sur laquelle f se diagonalise. D'où le résultat. (la base de diagonalisation est orthogonale car les espaces propres de f sont orthogonaux, il suffit ensuite de renormaliser).

La spécialisation au cas des matrices est que toute matrice hermitienne complexes est diagonalisable, avec une matrice de passage unitaire.

Exercice 29. On sait que l'application p considérée est continue par la continuité du produit matriciel. On commence par montrer que p est une application bijective.

On commence par montrer l'existence et l'unicité de la racine carrée positive d'une matrice hermitienne positive : Soit D une matrice hermitienne positive et diagonale, elle admet une unique racine $\sqrt{D}$, dont les coefficients diagonaux sont les racines des coefficients diagonaux de D. Soit A une matrice hermitienne positive. On diagonalise A dans une base orthonormée : $PAP^{-1} = D$, la matrice $P^{-1}\sqrt{D}P$ est la racine carrée symétrique positive de A.

Ensuite, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On commence par noter que M^*M est hermitienne car

$$(M^*M)^* = M^*M^{**} = M^*M$$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\langle M^*Mx, x\rangle = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|^2$$

qui est positif ou nul, et strictement positif si $x \neq 0$ (car $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$). Donc $M^*M \in H_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pose H la racine positive de M^*M. Pour montrer que $U := MH^{-1}$ est unitaire, on calcule

$$U^*U = H^{-1*}M^*MH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_N$$

car H est hermitienne (donc H^{-1} également). L'application p est donc surjective.

Pour l'injectivité de p, si $UH = U'H' = M$, on a $M^*M = H^2 = H'^2$, l'unicité des racines hermitiennes positives nous donne alors $H = H'$, et donc $U = MH^{-1} = MH'^{-1} = U'$. Donc la décomposition polaire est unique.

Il reste à montrer que la réciproque de p est continue. Soient (U_p) et (H_p) deux suites telles que (U_pH_p) converge vers UH. Soit U' une valeur d'adhérence de (U_p), limite de la sous-suite (U_{p_k}). On a que (H_{p_k}) converge vers $U'^{-1}M = H'$, qui est symétrique définie positive. Comme $M = U'H'$, l'unicité de la décomposition polaire donne $U = U'$ et $H = H'$. La suite (U_p) n'a alors qu'une seule valeur d'adhérence U. Elle converge alors vers U comme suite du compact $U_n(\mathbb{C})$, d'où le résultat.

Exercice 30.
1. Le polynôme caractéristique de A est $(X+1)(X-1)(X-3)$. Une base de vecteurs propres est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}$$

il s'agit d'une base orthogonale, qu'il suffit de renormaliser pour avoir une base orthonormée.

2. Les matrices hermitiennes sont positives si et seulement si leurs valeurs propres le sont (il suffit de regarder leur diagonalisation). On a $\mathrm{tr}(A) = -3 < 0$, donc A n'est pas positive, mais $\det(A) = 11 > 0$ donc A n'est pas négative non plus. De même B est de trace positive et de déterminant négatif.

Exercice 31.
1. On voit d'abord que $\langle ., . \rangle_\rho$ est hermitien :

$$\begin{aligned}
\langle y, x \rangle_\rho &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g.y, g.x \rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\langle g.x, g.y \rangle} \\
&= \langle x, y \rangle_\rho
\end{aligned}$$

On montre ensuite que $\langle ., . \rangle_\rho$ est linéaire par rapport à sa première variable :

$$\begin{aligned}
\left\langle \lambda x + x', y \right\rangle_\rho &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left\langle g.(\lambda x + x'), g.y \right\rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left\langle \lambda g.x + g.x', g.y \right\rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda \langle g.x, g.y \rangle_\rho + \left\langle g.x', g.y \right\rangle \\
&= \lambda \langle x, y \rangle_\rho + \left\langle x', y \right\rangle_\rho
\end{aligned}$$

Ensuite, $\langle ., . \rangle_\rho$ est définie positive, car

$$\langle x, x \rangle_\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \|g.x\|^2 \geqslant 0$$

comme ρ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $x \neq 0$ si et seulement si tous les $g.x$ sont non nuls, et $\langle x, x\rangle \neq 0$. Ensuite, pour $h \in G$, on a

$$\langle h.x, h.y\rangle_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle gh.x, gh.y\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}\left\langle g'.x, g'.y\right\rangle = \langle x, y\rangle_\rho$$

donc l'endomorphisme $\rho(h)$ est unitaire pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle_\rho$.

2. Le groupe unitaire laisse invariant les orthogonaux : si $y \in F^{\perp_\rho}$, et $x \in F$, on a

$$\langle x, g.y\rangle_\rho = \left\langle g^{-1}.x, y\right\rangle_\rho = 0$$

car $g^{-1}.x \in F$.

3. C'est une récurrence sur $\dim E$. Le cas de dimension 1 est immédiat (une telle représentation est forcément irréductible). Ensuite, si E n'est pas irréductible, il existe un $F \leqslant E$ qui soit G-stable. La décomposition $E = F \oplus F^{\perp_\rho}$ est une somme directe de représentations de G de dimension inférieure, on conclut par récurrence que F et $F^{\perp_\rho}$ sont sommes directes de représentations irréductibles, il en va donc de même de E comme annoncé.

4. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on voit l'inclusion $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ comme une représentation de G. Soient $\mathcal{B}_\rho$ et $\mathcal{B}$ deux bases orthonormées pour $\langle .,.\rangle_\rho$ et $\langle .,.\rangle$ respectivement. L'automorphisme de $\mathbb{C}^n$ envoyant $\mathcal{B}_\rho$ sur $\mathcal{B}$ conjugue $U(\langle .,.\rangle_\rho)$ en $U_n(\mathbb{C})$, et en particulier conjugue G en un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$.