Examen partiel du jeudi 13 mars 2025

Durée : 2h. Aucun document et aucun appareil électronique n'est autorisé.

Questions de cours

1) Rappeler la définition de la branche principale Log du logarithme, expliquer pourquoi c'est une fonction holomorphe, et rappeler pourquoi sa dérivée est donnée par la formule $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$.
2) Énoncer le théorème permettant de calculer la somme et le produit de deux séries entières.

Exercice : une fonction trigonométrique

On définit la fonction *cosinus hyperbolique* ch (resp. la fonction *sinus hyperbolique* sh) par la formule $\mathrm{ch}(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ (resp. $\mathrm{sh}(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$).
1) Montrer que ch et sh sont holomorphes sur tout le plan complexe, puis calculer leur dérivée.
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x, y) = \mathrm{ch}(x)\cos(y)$.
2) Montrer que u est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer toutes les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. On commencera par écrire les équations que doit satisfaire v.
4) Calculer la dérivée de f, puis sa dérivée seconde.
5) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(iz) = \cos(z)$ et $\mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$, puis appliquer la formule d'addition $\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$ (valable pour tous $a, b \in \mathbb{C}$) pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{ch}(x + iy)$, si $x, y \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on à propos de f ?

Problème : Développement binomial

Une fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Posons $f_\alpha(z) := e^{\alpha\,\mathrm{Log}(z)}$. Le but du problème est de calculer un développement en série entière de f_α au voisinage de tout point z_0 de $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
1) Justifier que f_α est bien définie et holomorphe sur Ω.
2) Posons $g(z) := f_\alpha(z_0 + z)$. Montrer que g est holomorphe sur un disque ouvert D centré en 0.
3) Montrer que $g'(z) = \frac{\alpha}{z_0+z} g(z)$ pour tout $z \in D$.

Digression : partie principale de la racine m-ième

4) Montrer que si m est un entier, alors $f_m(z) = z^m$ pour tout $z \in \Omega$.
5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_{1/m}(1) = 1$, et que $f_{1/m}(z)^m = z$ pour tout $z \in \Omega$.
Le but de la question suivante est de montrer que $f_{1/m}$ est l'unique fonction satisfaisant ces conditions.
6a) Soit $h : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $h(z)^m = 1$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que h est constante. *On pourra dériver cette relation ; alternativement, on pourra montrer que h est à valeurs dans un ensemble discret.*
6b) Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(z)^m = z$ et $g(1) = 1$. Appliquer ce qui précède à $h = \frac{g}{f_{1/m}}$ (dont on justifiera l'existence) pour montrer que $g = f_{1/m}$ sur Ω.
Le fonction $f_{1/m}$ est appelée *partie principale de la racine m-ième*, et est notée $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ (ou seulement $z \mapsto \sqrt{z}$ si $m = 2$).

↶ **Tournez la page** ↷

Séries entières solutions d'une équation différentielle

On cherche une solution h de l'équation différentielle

$$(E) \quad h'(z) = \frac{\alpha}{z_0 + z} h(z)$$

sous la forme d'une série entière. Précisément, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et soit $h : z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, dont on suppose non nul le rayon de convergence R.

7) Rappeler comment se calcule la dérivée de h sur le disque ouvert $D(0, R)$.

8) En déduire le développement en série entière de $z \mapsto (z_0 + z)h'(z) - \alpha h(z)$.

9) En déduire que h est solution de (E) sur $D(0, R)$ si et seulement si $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{(k+1)z_0} a_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

10) Montrer que ceci implique : $\forall k \geqslant 0$, $a_k = \frac{1}{z_0^k}\binom{\alpha}{k} a_0$, où $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ (avec $\binom{\alpha}{0} := 1$).

Fixons maintenant $a_0 \in \mathbb{C}$ et posons $a_k := \frac{1}{z_0^k}\binom{\alpha}{k} a_0$ $(= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k! z_0^k} a_0)$.

11) Calculer le rayon de convergence de $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ à l'aide du critère de d'Alembert.

12) En déduire que $h(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_n z^n$ définit une solution de (E) sur un disque ouvert centré en 0. Que vaut $h(0)$?

Retour au problème initial

Pour $a_0 \in \mathbb{C}$, on pose $h(z) = a_0 \sum_{k\geqslant 0} \binom{\alpha}{k}\left(\frac{z}{z_0}\right)^k$ comme ci-dessus.

13) Justifier que g ne s'annule jamais, puis calculer la dérivée de h/g.

14) En déduire que si on pose $a_0 := g(0)$, on a $g = h$ sur un disque ouvert centré en 0.

15) Conclure que f_α est développable en série entière en z_0, et expliciter le développement de $f_\alpha(z_0 + z)$ en série entière de z. En particulier, montrer que pour $z_0 = 1$, on obtient :

$$\forall z \in D(0, 1),\ f_\alpha(1 + z) = \sum_{k\geqslant 0} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

16) Calculer les quatre premiers coefficients des développements en série entière de $\sqrt{1 + z}$ et de $\sqrt[3]{1 + z}$ au voisinage de $z = 0$.