Examen partiel du jeudi 28 mars 2024

Durée : 2h. Aucun document et aucun appareil électronique n'est autorisé.

Questions de cours

1) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme, et expliquer pourquoi c'est une fonction holomorphe.

2) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière, et énoncer la formule d'Hadamard. Donner un exemple de calcul de rayon de convergence.

Exercice 1 : Une fonction holomorphe

On note $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x > 0$, on pose :

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Montrer que ceci définit une fonction f holomorphe sur H. Quelle est sa dérivée ?

Exercice 2 : Une question d'harmonicité

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que la fonction $u : (x,y) \mapsto \varphi(x^2+y^2)$ soit harmonique sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

1) Montrer que φ vérifie cette condition si et seulement si $t\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0$ pour tout $t \in]0,\infty[$.

2) Résoudre cette équation différentielle pour déterminer ce que peut être φ'. On pourra commencer par faire apparaître la dérivée de $t \mapsto t\varphi'(t)$.

3) En déduire toutes les fonctions φ solutions du problème.

4) Déterminer toutes les fonctions f holomorphes telles que $\operatorname{Re}(f(z))$ ne dépend que de $|z|$, sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}_-$, puis sur $\mathbb{C}^*$. On admet que la partie réelle d'une fonction holomorphe est nécessairement de la classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3 : Problèmes au bord du disque de convergence

On considère la série entière $f(z) = \sum_{n \geqslant 1} z^{2^n}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

2) Étudier la limite de $f(z)$ quand $z \in [0,1[$ tend vers 1 (on pourra par exemple comparer f aux fonctions $z \mapsto z$, $z \mapsto z + z^2$, $z \mapsto z + z^2 + z^4$, etc., ou bien utiliser la question précédente). En déduire qu'on ne peut pas prolonger f par continuité en 1.

3) Montrer que pour tout z dans le disque de convergence, $f(z) = z^2 + f(z^2)$.

4) Utiliser les deux questions précédentes pour montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en -1. Puis montrer qu'on ne peut pas non plus la prolonger par continuité en $\pm i$.

5) Montrer que pour tout $k \geqslant 0$, si ω est une racine 2^k-ième de l'unité, f ne peut pas être prolongée par continuité en ω. On pourra raisonner par récurrence sur k et étudier la limite de $f(t\omega)$ si $t \in [0,1[$ tend vers 1.

6) Peut-on prolonger f en une fonction continue sur un ouvert connexe contenant strictement le disque de convergence ? On pourra commencer par faire un dessin.