Corrigé du partiel du 13/03/2024.

Exercice.

1) ch et sh sont des combinaisons linéaires de $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto e^{-z}$, qui sont toutes les deux holomorphes sur $\mathbb{C}$.
(la seconde comme composée de $z \mapsto -z$ avec $z \mapsto e^z$).

Elles sont donc holomorphes, et on peut calculer leur dérivée avec les formules usuelles :

$$\rightarrow ch'(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = sh(z)$$

$$\rightarrow sh'(z) = \frac{e^z - (-e^{-z})}{2} = ch(z).$$

2) On calcule $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$.

$\partial_x u = ch'x \cos y = shx \cos y$ $\qquad$ $\partial_y u = chx \cos' y = -chx \sin y$

$\partial_x^2 u = sh'x \cos y = chx \cos y$ $\qquad$ $\partial_y^2 u = -chx \sin' y = -chx \cos y$.

On trouve bien $\partial_y^2 u = -\partial_x^2 u$, c'est-à-dire $\Delta u = 0$: u est harmonique.

3) On cherche v qui satisfasse avec u les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \partial_x v = -\partial_y u = chx \sin y \\ \partial_y v = \partial_x u = shx \cos y \end{cases}$$

En intégrant la première équation à x fixé, il vient :

$$v(x,y) = \int_x chx \sin y = shx \sin y + C(y)$$

où C est une fonction de y. (constante en x).

En reportant ceci dans la seconde équation, on trouve :

$$\underbrace{shx \cos y + C'(y)}_{\partial_y v} = shx \cos y,$$

c'est-à-dire $C'(y) = 0$: C doit être constante (et on note encore $\underset{\hookrightarrow \in \mathbb{R}}{C}$ sa valeur).

On en déduit que les fonctions holomorphes de partie réelle u sont données par $x+iy \longmapsto \underbrace{\operatorname{ch} x \cos y}_{u(x,y)} + \underbrace{i \operatorname{sh} x \sin y}_{+iv(x,y)} + iC$, avec $C \in \mathbb{R}$.

4) D'après la formule du cours, si $f = u + iv$ comme ci-dessus, on a $f'(x+iy) = \partial_x u + i \partial_x v = \underbrace{\operatorname{sh} x \cos y}_{U(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{ch} x \sin y}_{V(x,y)}$.

En appliquant la même formule à $f' = U + iV$, on trouve :

$$f''(x+iy) = \partial_x U + i \partial_x V = \partial^2_{x} u + i \partial^2_{x} v$$

$$= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.$$

Rq: Si $C = 0$, $f'' = f$!

5) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} \operatorname{ch}(iz) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \\ \operatorname{sh}(iz) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = i \sin z. \end{cases}$

On en déduit, avec la formule d'addition :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(iy) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(iy)$$

$$= \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

D'où finalement : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\boxed{f(z) = \operatorname{ch}(z) + iC}$ $(C \in \mathbb{R})$.

Problème.

1) C'est la composée de Log, qui est bien définie et holomorphe sur Ω, par $z \mapsto \alpha z$ puis exp, qui sont bien définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc elle est bien définie et holomorphe sur Ω.

2) g est holomorphe là où elle est définie (comme composée de fonctions holomorphes). Comme $z_0 \in \Omega$, et Ω est ouvert, Ω contient le disque ouvert $D(z_0, r)$ pour un certain $r>0$, donc f_α est bien définie sur $D(z_0,r) = z_0 + \underbrace{D(0,r)}_{=:D}$. g est alors bien définie sur D.

3) On a $g'(z) = \frac{d}{dz}\left(e^{\alpha \log(z_0+z)}\right) = \alpha \underbrace{\mathrm{Log}'(z_0+z)}_{\frac{1}{z_0+z}} \underbrace{e^{\alpha \mathrm{Log}(z_0+z)}}_{g(z)} = \frac{\alpha}{z+z_0} g(z)$.

4) Si $m \in \mathbb{N}^*$, on a $f_m(z) = e^{m \mathrm{Log}(z)} = e^{\overbrace{\mathrm{Log}(z)+\dots+\mathrm{Log}(z)}^{m \text{ fois}}} = \underbrace{e^{\mathrm{Log}(z)} \times \dots \times e^{\mathrm{Log}(z)}}_{m \text{ fois}}$,

donc $f_m(z) = (e^{\mathrm{Log}(z)})^m = z^m$ pour tout $z \in \Omega$.

5) On a $f_\alpha(1) = e^{\alpha \mathrm{Log}(1)} = e^0 = 1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Et si $\alpha = \frac{1}{m}$, alors $f_{\frac{1}{m}}(z)^m = \left(e^{\frac{1}{m}\mathrm{Log}(z)}\right)^m = e^{\frac{1}{m}\mathrm{Log}(z)\cdot m} = e^{\mathrm{Log} z} = z$.

comme à la question précédente

(pour tout $z \in \Omega$)

6a) * En dérivant $h^m = 1$:

$h' h^{m-1} = 0$, donc $h' = 0$.

($h(z)^m = 1$ implique $h(z) \neq 0$)

Comme Ω est un ouvert connexe, si $h' = 0$ sur Ω, alors h est constante sur Ω.

* Méthode alternative : h est à valeurs dans l'ensemble μ_m des racines m^e de l'unité de $\mathbb{C}$. Or $\mu_m = \{1, e^{\frac{2i\pi}{m}}, e^{\frac{4i\pi}{m}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(m-1)}{m}}\}$ est fini (de cardinal m). Il est donc discret ; mais Ω est connexe et h est continu, donc $h(\Omega)$ est connexe. $h(\Omega)$ est donc réduit à un point : h est constante.

6b) Sous ces hypothèses, si $z \in \Omega$, on a $\left(\frac{g(z)}{f_{\frac{1}{m}}(z)}\right)^m = \frac{g(z)^m}{f_{\frac{1}{m}}(z)^m} = \frac{z}{z} = 1$, pour tout $z \in \Omega$. Remarquons que $f_{\frac{1}{m}}(z)$ est toujours non-nul, puisque c'est l'exponentielle d'un nombre complexe.

Comme $\frac{g}{f_{\frac{1}{m}}}$ est holomorphe (comme quotient de deux fonctions holomorphes), elle doit être constante d'après (6a).

Or $\frac{g(1)}{f_{\frac{1}{m}}(1)} = \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, $\frac{g}{f_{\frac{1}{m}}} = 1$, d'où $g = f_{\frac{1}{m}}$ (sur Ω).

7) La dérivée de h est donnée par :

$$\forall z \in D(0,R), \quad h'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

8) On a donc, pour $z \in D(0,R)$:

$$(z_0 + z) h'(z) - \alpha h(z) = z_0 \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n + \underbrace{\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^{n+1}}_{= \sum_{n \geq 1} n a_n z^n = \sum_{n\geq 0} n a_n z^n} - \alpha \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(z_0(n+1) a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n\right) z^n.$$

ajout de $0 \times a_0 \times z^0 = 0$.

(en utilisant le théorème pour la somme de séries entières, qui justifie cette égalité pour tout $z \in D(0,R)$).

9) On a $(E) \Leftrightarrow (z_0+z)h'(z) - \alpha h(z) = 0$.

(E) est donc vérifiée pour tout $z \in D(0,R)$ si et seulement si les coefficients du développement en série entière de la question 8 sont nuls, c-à-d si et seulement si :

$$\forall n \geq 0,\quad z_0(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n = 0$$

Ce qui équivaut (puisque $z_0(n+1) \neq 0$) à :

$$\forall n \geq 0,\quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{z_0(n+1)} a_n.$$

10) On déduit de la formule précédente :

$$a_k = \frac{\alpha-(k-1)}{kz_0} a_{k-1} = \underbrace{\frac{\alpha-k+1}{kz_0} \cdot \frac{\alpha-k+2}{(k-1)z_0} \cdots \frac{\alpha-1}{2z_0} \cdot \frac{\alpha}{z_0} a_0}_{= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!\, z_0^k} a_0} = \frac{1}{z_0^k}\binom{\alpha}{k} a_0.$$

Pour plus de rigueur, on montre le résultat par récurrence sur $k \geq 0$.

Pour cela, on écrit la définition inductive des $\binom{\alpha}{k}$: $\begin{cases} \binom{\alpha}{0} = 1 \\ \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha-(k+1)+1}{k+1}\binom{\alpha}{k} \end{cases}$ (pour tout $k \geq 0$).

→ Initialisat° : $\underbrace{\frac{1}{z_0}}_{=1}\underbrace{\binom{\alpha}{0}}_{=1} a_0 = a_0$ ✓

→ Hérédité : Supposons le résultat vrai pour un certain $k \geq 0$.

Alors $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{z_0(k+1)} a_k \underset{\text{hyp. de réc.}}{=} \frac{\alpha-k}{z_0(k+1)}\left(\frac{1}{z_0^k}\binom{\alpha}{k}a_0\right) = \frac{1}{z_0^{k+1}} \underbrace{\frac{\alpha-k}{k+1}\binom{\alpha}{k}}_{\binom{\alpha}{k+1}} a_0$

Ceci montre le résultat pour $k+1$, et achève la récurrence.

11) On a, pour tout $k \geq 0$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{z_0(k+1)} = -\frac{\cancel{k}}{z_0 \cancel{k}} \underbrace{\left(\frac{1 - \frac{\alpha}{k}}{1 + \frac{1}{k z_0}} \right)}_{\xrightarrow[k\infty]{} 1} \xrightarrow[k\infty]{} -\frac{1}{z_0}$.

Ainsi, $\lim_{k\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{|z_0|}$, et le rdc cherché est $|z_0|$.

12) Par construction, la fonction h ainsi définie sur $D(0, |z_0|)$ satisfait (E)

(on a bien $\forall k \geq 0$, $a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{(k+1) z_0} a_k$, ce qui équivaut à (E) d'après (9)).

De plus, $h(0) = a_0$ (terme constant du DSE).

13) f_α ne s'annule pas, $f(z)$ étant l'exponentielle d'un nombre complexe, donc $g : z \mapsto f_\alpha(z_0 + z)$ non plus. Le quotient $\frac{h}{g}$ est donc $\left\{ \begin{array}{l} \text{bien défini} \\ \text{holomorphe} \end{array} \right.$ là où g et h le sont, et on a :

$$\forall z \in D \cap D(0,R), \quad \left(\frac{h}{g}\right)'(z) = \frac{1}{h(z)^2} \Big(\underbrace{h'(z)}_{= \frac{\alpha}{z_0 + z} h(z)} g(z) - h(z) \underbrace{g'(z)}_{= \frac{\alpha}{z_0 + z} g(z)} \Big)$$

$$= \frac{\alpha}{(z_0 + z) h(z)^2} \big(h(z) g(z) - h(z) g(z) \big) = 0.$$

14) $\frac{h}{g}$ est holomorphe sur $D \cap D(0,R)$, qui est un disque centré en 0

(si $D = D(0,r)$, c'est $D(0, \underbrace{\min(r,R)}_{=: \rho})$).

Comme $\left(\frac{h}{g}\right)' = 0$ sur ce disque, $\frac{h}{g}$ y est constante.

Si de plus on suppose que $a_0 = g(0)$, on a $\frac{h}{g}(0) = \frac{h(0)}{g(0)} = \frac{a_0}{g(0)} = 1$,

d'où $\frac{h}{g} = 1$, c'est-à-dire $h = g$ (sur $\underbrace{D \cap D(0,R)}_{= D(0,\rho)}$).

15) La question précédente montre que si on pose $a_0 := g(0) = f_\alpha(z_0)$, alors $\forall z \in D(0,\rho)$, $g(z) = h(z)$, ce qui se traduit par :

$$\forall z \in D(0,\rho), \quad f_\alpha(z_0 + z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z_0^k} \binom{\alpha}{k} a_0 z^k = f_\alpha(z_0) \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} \left(\frac{z}{z_0}\right)^k.$$

Pour $z_0 = 1$, on a $f_\alpha(z_0) = 1$, et on trouve bien le développement annoncé, si on montre qu'on peut prendre $\rho = 1$.

On $\rho = \min(r, R)$ où $\left|\begin{array}{l} R = \text{rayon de convergence de } \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \underbrace{|z_0|}_{\text{quest}^{\circ}\ 1} \\ r = \text{rayon d'un disque ouvert centré en } z_0 \text{ inclus dans } \Omega.\ (\text{quest}^{\circ}\ 2) \end{array}\right.$

Remarquons que $r \leq R = |z_0|$, puisque si on avait $r > |z_0|$, on aurait $0 \in D(z_0, r)$, mais alors $D(z_0, r) \not\subset \Omega$, puisque $0 \notin \Omega$.

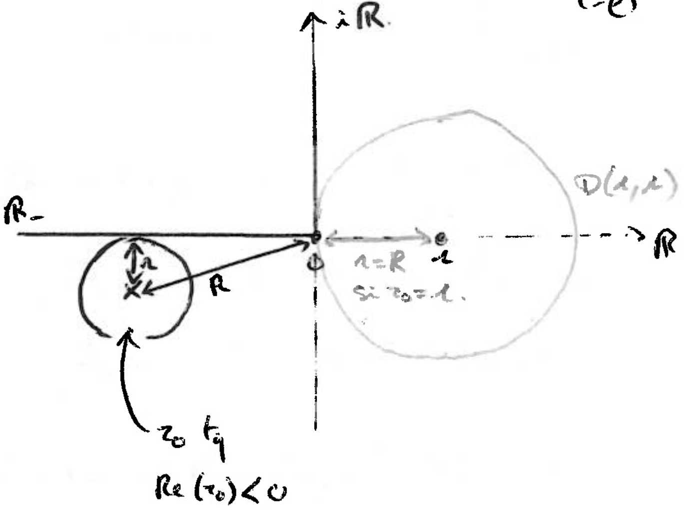
(et donc $\rho = r$)

Pour $z_0 = 1$, on a bien $D(1,1) \subset \Omega$,

(si $x \in \mathbb{R}_-$, alors $|1 - x| \geq 1$)

donc on peut choisir $r = R = 1$, et le développement est valable sur $D(0,1)$, d'où la conclusion.

Rq: En général, on peut prendre $\underset{(=\rho)}{r} = d(z_0, \mathbb{R}_-)$, qui est $< |z_0|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z_0) < 0$.



16) D'après la question 15 :

$$\forall z \in D(0,1), \quad \underbrace{\sqrt[m]{1+z}}_{f_{\frac{1}{m}}(1+z)} = \sum_{k\geq 0} \binom{1/m}{k} z^k.$$

Pour $m = 2$, on trouve : $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2} z - \frac{3}{8} z^2 + \frac{7}{64} z^3 + \dots$

Pour $m = 3$, on trouve : $\sqrt[3]{1+z} = 1 + \frac{1}{3} z - \frac{1}{9} z^2 + \frac{5}{81} z^3 + \dots$