Corrigé du partiel d'Analyse complexe du 28/03/24.

Exercice 1.

On peut utiliser les conditions de Cauchy-Riemann.

→ f est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur H, puisque $\left|\begin{array}{l} \ln \text{ l'est sur }]0,\infty[\\ \arctan \text{ l'est sur } \mathbb{R}. \\ x \neq 0 \text{ et } x^2+y^2>0 \end{array}\right.$ [si $x+iy \in H$.]

→ Posons $\begin{cases} u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$

On a
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{(de même)} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+(y/x)^2}}_{\frac{x^2}{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$
(Rappelons que $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.)

On a donc bien $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$ en tout point du plan : les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, donc f est holomorphe sur H ; de dérivée $f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

On aurait pu remarquer que f est en fait Log. (restreint à H)

↳ se voit a posteriori en remarquant que $f'(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$,

et que $f(1) = 1$.

↳ se voit directement avec la formule de l'énoncé :

$\rightarrow \mathrm{Re}(f(\underbrace{z}_{x+iy})) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln|z|$.

Ici, on peut dire directement que comme $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\mathrm{Log})$, $f = \mathrm{Log} + \underset{\in i\mathbb{R}}{\text{cste}}$; or $f(1) = 1$,

donc $f = \mathrm{Log}$

$\rightarrow$ Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\begin{cases} \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& (z \in H), \\ r > 0 \end{cases}$ $\quad \theta = \mathrm{Arg}(z)$.

$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix}$

on a $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$

donc $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\left(+0\cdot\pi, \text{ car } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right.$.

Ainsi, $f(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Log}(z)$.

(qui est bien sûr holomorphe, de dérivée $z \longmapsto \frac{1}{z}$).

Exercice 2

1) u est harmonique si et seulement si $\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\Delta u} = 0$.

Exprimons ce que cela signifie pour φ, si u est donnée par $(x,y) \longmapsto \varphi(x^2+y^2)$.

→ On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,\varphi'(x^2+y^2)$, et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2\varphi''(x^2+y^2) + 2\varphi'(x^2+y^2)$.

→ De même, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2\varphi''(x^2+y^2) + 2\varphi'(x^2+y^2)$.

→ On a donc $\Delta u = 0 \iff \forall x,y\ ,\ 4(x^2+y^2)\varphi''(x^2+y^2) + 4\varphi'(x^2+y^2) = 0$.

Quand $x+iy$ parcourt $\mathbb{C}^*$, $t = x^2+y^2$ parcourt $\mathbb{R}_+^*$.

$\times \frac{1}{4}$.

Ainsi, $\underline{\Delta u = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0}$

2) On remarque que $\frac{d}{dt}(t\varphi'(t)) = t\varphi''(t) + \varphi'(t)$, donc l'équation précédente dit exactement que la dérivée de $t \longmapsto t\varphi'(t)$ est nulle.

Elle équivaut donc à $t\varphi'(t) = \text{cste}$, i.e. à $\boxed{\varphi'(t) = \frac{\lambda}{t}}$, pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Au vu des questions précédentes, $\Delta u = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,$ $\varphi'(t) = \frac{\lambda}{t}$.

Les solutions sont donc les fonctions φ de la forme $\boxed{t \longmapsto \lambda \ln t + C}$, où $\lambda, C \in \mathbb{R}$.

4) Notons $f = u + iv$, où $\begin{cases} u = \mathrm{Re} f \\ v = \mathrm{Im} f \end{cases}$.

La condition sur f signifie que $u(z) = \psi(|z|)$ pour une certaine fonction $\psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$.

En posant $\varphi(t) = \psi(\sqrt{t})$, on est ramenés au problème précédent :

$\rightarrow u(z) = \varphi(|z|^2)$ signifie que $\forall x,y \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $u(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$.

$\rightarrow u = \mathrm{Re}(f)$ doit être harmonique si f est holomorphe.

On en déduit que $u(z) = \underbrace{d \ln(|z|^2)}_{= \frac{d}{2} \ln|z|} + C$, pour des constantes $d, C \in \mathbb{R}$.

Pour trouver les fonctions f dont la partie réelle est de cette forme, on peut appliquer la méthode du cours, mais il est beaucoup plus efficace de remarquer que $f(z) = \underset{\in \mathbb{R}}{A} \,\mathrm{Log}(z) + \underset{\in \mathbb{R}}{B}$ a pour partie réelle $A \ln|z| + B$.

Toutes les fonctions définies sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ ayant pour partie réelle une fonction de la forme $z \mapsto A \ln|z| + B$ $(A, B \in \mathbb{R})$ sont donc obtenues en ajoutant une constante imaginaire à celles-ci, c-à-d qu'on a $\underline{f(z) = A \,\mathrm{Log}(z) + C}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{C}$.

Les seules de ces fonctions qui s'étendent continûment à $\mathbb{C}^*$ sont les fonctions constantes, qui sont donc les seules solutions définies sur $\mathbb{C}^*$

Exercice 3

1) On a $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ avec $a_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ n'est pas une puissance de } 2. \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

La suite $(\sqrt[k]{|a_k|})$ a donc pour valeurs d'adhérence 0 et 1.

Sa limite supérieure est donc 1 ; par conséquence, le rayon de convergence cherché est $\boxed{1}$.

2) Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, qui est le disque de convergence de f.

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^{k+1}} = \sum_{\ell=2}^{\infty} z^{2^\ell}$$

D'où $f(z) = z^2 + \sum_{\ell=2}^{\infty} z^{2^\ell} = z^2 + f(z^2)$.

3) Si $z \in [0,1[$, on a $f(z) \geq \underbrace{z}_{\xrightarrow[z\to 1^-]{} 1}$, $f(z) \geq \underbrace{z+z^2}_{\xrightarrow[z\to 1^-]{} 2}$, $f(z) \geq \underbrace{z+z^2+z^3}_{\xrightarrow[z\to 1^-]{} 3}$.

On en déduit que si z tend vers 1 en restant dans $[0,1[$, alors $f(z)$ tend vers $+\infty$.

Précisément, si on fixe $C \geq 0$, on peut choisir N entier $\geq 2C$.

Alors, si $z \in [0,1[$, $f(z) \geq z + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^N} \geq N \cdot z^{2^N}$,

donc $f(z) \geq \frac{N}{2} \geq C$ dès que $z \geq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2^N}}_{<1}$, donc dès que $z \geq 1 - \varepsilon$, si $\varepsilon < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2^N}$.

f n'admet donc pas de limite finie en $z = 1$, donc ne peut pas être prolongée par continuité en ce point.

4) Si f admettait une limite finie en -1, par passage à la limite dans $f(z^2) = f(z) - z^2$ (pour $z \to -1$, $z \in]-1,0]$), on obtiendrait l'existence d'une limite finie pour $f(t)$ si $\begin{cases} t \to 1 \\ t \in [0,1[\end{cases}$, ce qui contredirait le résultat de la question précédente.

Précisément, si $t \in [0,1[$, $f(t) = f(-\sqrt{t}) - t \xrightarrow[t \to 1^-]{} \lim_{-1} f - 1$,

si cette limite existait.

De même, si f admet une limite finie en i (resp. en $-i$),

on pourrait passer à la limite dans $f(z^4) = f(z^2) - z^4$,
$= f(z) - z^2 - z^4$

on obtiendrait une limite finie pour $z^4 \to 1$. (pour $z \to \pm i$)

Précisément, si $t \in [0,1[$, $f(t) = f(i\, t^{1/4}) + t^{1/2} - t \xrightarrow[t \to 1^-]{} \lim_{i} f$ (si elle existe).

5) On va montrer par récurrence que si ω est une racine 2^k-ième de l'unité, $f(s\omega) \xrightarrow[\substack{s \to 1^- \\ (s \in [0,1[)}]{} +\infty$.

A fortiori, on aura alors que f n'a pas de limite finie en ω, donc ne peut pas être prolongée par continuité en ω.

→ <u>Initialisation</u> : $k=0$ — c'est la question 3.

→ <u>Hérédité</u> : Supposons le résultat vrai pour un certain $k \geq 0$.

Soit ω une racine 2^{k+1}-ième de l'unité.

Ceci signifie que $\omega^{2^{k+1}} = 1$, donc que $(\omega^2)^{2^k} = 1$.

Ainsi, ω^2 est une racine 2^k-ième de 1.

Or si $t \in [0,1[$, $f(t\omega) = t^2\omega^2 + f(t^2\omega^2)$.

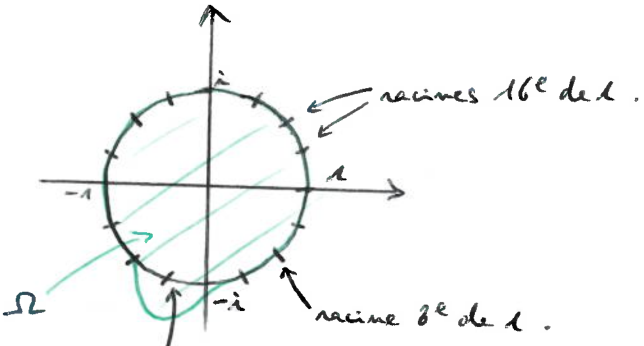
④

Autrement dit, si $s \in [0,1[$, $f(s\omega^2) = \underbrace{f(\sqrt{s}\,\omega) - s\omega^2}_{\xrightarrow[s\to 1^-]{} \underbrace{\lim_{t\to 1^-} f(t\omega) - \omega^2}_{\text{si cette limite existe}}}$.

Or $\lim_{s\to 1^-} f(s\omega^2)$ n'existe pas, par hypothèse de récurrence.

Donc $\lim_{t\to 1^-} f(t\omega)$ non plus. Ce qui achève la récurrence.

6)



Ω contient une racine 2^k-ième de 1 pour k assez grand (ici $k = 4$).

Soit $U := \{$racines 2^k-ième de 1, pour $k \in \mathbb{N}\}$.

U est l'image par $t \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2i\pi t}$ des rationnels dyadiques de $[0,1]$ (de la forme $\frac{n}{2^k}$, $n, k \in \mathbb{N}$).

φ est une surjection continue de $[0,1]$ sur le cercle $S = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Comme l'ensemble des rationnels dyadiques est dense dans $[0,1]$ $\left(\text{si } r \in [0,1],\ \left|r - \frac{\lfloor 2^n r \rfloor}{2^n}\right| < \frac{1}{2^n}, \text{ pour tout } n\right)$, son image par φ est dense dans S.

Or, si Ω est un ouvert connexe contenant strictement $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, il intersecte non-trivialement le cercle S.

(sinon $\Omega = \mathbb{D} \sqcup \{z \in \Omega / |z| > 1\}$ serait une partition de Ω en deux ouverts non-vides, ce qui contredirait sa connexité

$\Omega \cap S$ est alors un ouvert non vide de S, qui contient donc un point du sous-ensemble dense U.

Comme f ne peut pas être prolongée continûment en les points de U, elle ne peut pas s'étendre en une fonction continue sur Ω :