Corrigé de l'examen du 5/05/2025

Exercice.

1) Rappelons que $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, où $\mathrm{Arg}(z)$ est l'unique argument de z dans $]-\pi,\pi[$.

On a $|j| = 1$ et $\mathrm{Arg}(j) = \frac{2\pi}{3}$,

donc $\mathrm{Log}(j) = i\frac{2\pi}{3}$.

En revanche, $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, et donc $\begin{cases} |j^2| = 1 \\ \mathrm{Arg}(j^2) = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Ainsi, $\underline{\mathrm{Log}(j^2) = -i\frac{2\pi}{3} \neq 2\,\mathrm{Log}(j) = i\frac{4\pi}{3}}$.

2) On écrit $a = |a|e^{i\mathrm{Arg}(a)}$ et $b = |b|e^{i\mathrm{Arg}(b)}$ (avec $\mathrm{Arg}(a), \mathrm{Arg}(b) \in]-\pi,\pi]$)

Alors $ab = |a|\cdot|b|\,e^{i(\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b))} \in \mathbb{R}_-$ ssi $\mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b) = \pi + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

On $\begin{cases} -\pi < \mathrm{Arg}(a) \leq \pi \\ -\pi < \mathrm{Arg}(b) \leq \pi \end{cases} \Rightarrow -2\pi < \mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b) \leq 2\pi$, donc $k = \pm 1$.

Ainsi, $\underline{ab \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(b) = \pm\pi}$ (pour $a, b \in \mathbb{C}^*$).

3) Notons $\theta = \mathrm{Arg}(a) \in]-\pi,\pi[$. Remarquons que si $z = 0$, $\mathrm{Log}(az)$ n'est pas défini.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Log}(az)$ est bien défini si et seulement si $az \notin \mathbb{R}_-$.

Or $az \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(a)+\mathrm{Arg}(z) = \pm\pi$, d'après la question précédente.

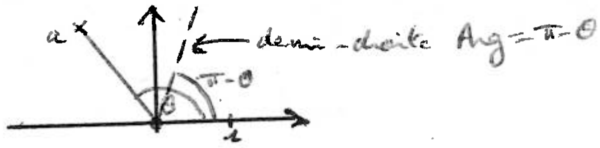
$\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z) = \pm\pi - \theta$.

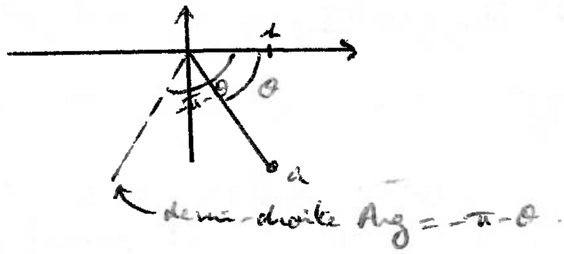
$\Leftrightarrow (\theta \in [0,\pi[$ et $\mathrm{Arg}(z) = \pi - \theta)$ ou $(\theta \in]-\pi,0[$ et $\mathrm{Arg}(z) = -\pi-\theta)$

$-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$

Dans les deux cas, l'ensemble de définition de $f_a : z \mapsto \mathrm{Log}(az)$ est $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite partant de 0.

Précisément, $\begin{cases} \underline{\text{si } \theta \geq 0}, \text{ c'est } \mathbb{C}\setminus\{re^{i(\pi-\theta)} / r \geq 0\} \\ \underline{\text{si } \theta < 0}, \text{ c'est } \mathbb{C}\setminus\{re^{i(-\pi-\theta)} / r \geq 0\}. \ (=\mathbb{C}\setminus\{re^{i(\pi-\theta)} / r \geq 0\}) \end{cases}$





4) On a $f_a'(z) = \frac{d}{dz}(\mathrm{Log}(az)) = a \cdot \mathrm{Log}'(az) = \frac{a}{az} = \frac{1}{z}$ si $z \in \Omega_a$.

5) On a $f_a' = \mathrm{Log}'$, donc $(f_a - \mathrm{Log})' = 0$ sur son ensemble de définition (qui est $\Omega_a \cap \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- = \Omega_a \setminus \mathbb{R}_-$)

Ainsi, si U est un ouvert connexe inclus dans $\Omega_a \setminus \mathbb{R}_-$, alors $(f_a - \mathrm{Log})|_U$ est constante.

6) On a $f_a(1) = \mathrm{Log}(a)$ et $f_a(i) = \mathrm{Log}(ia) = \ln|ia| + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(ia)}$

$\begin{cases} = \mathrm{Arg}(a) + \frac{\pi}{2} \text{ si } \mathrm{Arg}(a) < \frac{\pi}{2} \\ \text{pas défini si } \mathrm{Arg}(a) = \frac{\pi}{2} \\ = \mathrm{Arg}(a) - \frac{3\pi}{2} \text{ si } \mathrm{Arg}(a) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Ainsi, $f_a(i) = \begin{cases} \mathrm{Log}(a) + i\frac{\pi}{2} & \text{si } \mathrm{Arg}(a) < \frac{\pi}{2} \\ \mathrm{Log}(a) - i\frac{3\pi}{2} & \text{si } \mathrm{Arg}(a) > \frac{\pi}{2} \\ \text{pas défini} & \text{si } a \in \mathbb{R}_+ i. \end{cases}$

7) Il s'agit de montrer que si $|\mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(b)| < \pi$, alors b est dans la même composante connexe de $\Omega_a \setminus \mathbb{R}_-$ que 1, car alors, d'après les questions précédentes, on aura $(f_a - \mathrm{Log})(b) = (f_a - \mathrm{Log})(1)$, c'est-à-dire : $\mathrm{Log}(ab) - \mathrm{Log}(b) = \mathrm{Log}(a)$, ce qui est la conclusion cherchée.

Or, vu les dessins faits à la question 3, en notant $\theta = \mathrm{Arg}(a)$, la composante connexe de $\Omega_a \setminus \mathbb{R}_-$ contenant 1 est :

$$\begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \,/\, \mathrm{Arg}(z) < \pi - \theta\} & \text{si } \theta \geq 0. \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \,/\, \mathrm{Arg}(z) > -\pi - \theta\} & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

Dans le premier cas, $\mathrm{Arg}(z) < \pi - \theta \iff \mathrm{Arg}(z) + \theta < \pi \iff |\mathrm{Arg}(z) + \theta| < \pi$

$\hookrightarrow \begin{cases} \theta \in [0, \pi[\\ \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[\end{cases}$ (donc $\mathrm{Arg}(z) + \theta \in]-\pi, 2\pi[$).

Dans le second, $\mathrm{Arg}(z) > -\pi - \theta \iff \mathrm{Arg}(z) + \theta > -\pi$

$\iff |\mathrm{Arg}(z) + \theta| < \pi$

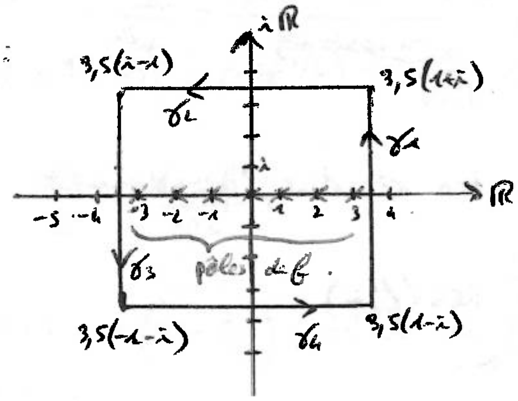
$\hookrightarrow \begin{cases} \theta \in]-\pi, 0[\\ \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[\end{cases}$ (donc $\mathrm{Arg}(z) + \theta \in]-2\pi, \pi[$).

Ainsi, dans les deux cas, cette composante connexe est décrite par la condition (sur $z \notin \mathbb{R}_-$) $|\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(a)| < \pi$, qui est satisfaite par $z = b$,

d'où la conclusion.

Problème : Calcul de $\zeta(2k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}}$.

1) Dessin pour $N = 3$:



Les côtés de C_N sont paramétrisés par :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto (N+\frac{1}{2})(1+ti) \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto (N+\frac{1}{2})(2-t+i) \end{cases}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto (N+\frac{1}{2})(-1+(2-t)i) \end{cases} \qquad \gamma_4 : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto (N+\frac{1}{2})(t-i) \end{cases}$$

2) $\sin(z) = 0 \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1$

$\iff 2iz \in 2i\pi\mathbb{Z}$

$\iff z \in \pi\mathbb{Z}$.

f est donc définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et elle y est holomorphe, comme produit et quotient de fonctions holomorphes.

Comme $f(z) = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{z^{2k}\sin(\pi z)}$ est un quotient de fonctions holomorphes, les points de $\mathbb{Z}$ sont des pôles de f (f est méromorphe).

ensemble discret de points de $\mathbb{C}$.

3) Les pôles de f à l'intérieur du carré sont $-N, -(N-1), \dots, N-1, N$.

4) Si $n \in \mathbb{Z}^*$, on écrit $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec $\begin{cases} g(z) = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{z^{2k}} \\ h(z) = \sin(\pi z). \end{cases}$

→ g est hol sur $\mathbb{C}^*$, donc au voisinage de $n \neq 0$.

→ $h(n) = 0$ et $h'(n) = \pi\cos(\pi n) = \pm\pi \neq 0$.

On conclut par le résultat du cours que f a un pôle simple en n, et que $\operatorname{Res}(f,n) = \dfrac{g(n)}{h'(n)} = \dfrac{\left(\dfrac{\cancel{\pi\cos(\pi n)}}{n^{2k}}\right)}{\cancel{\pi\cos(\pi n)}} = \dfrac{1}{n^{2k}}$.

5) On applique le théorème des résidus, qui donne :

$$I_N = \int_{C_N} f = 2i\pi \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res}(f,n)$$

somme sur les pôles de f à l'intérieur du carré.

Or $$\sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res}(f,n) = \operatorname{Res}(f,0) + \sum_{n=1}^{N} \Big(\underbrace{\operatorname{Res}(f,n)}_{=\frac{1}{n^{2k}}} + \underbrace{\operatorname{Res}(f,-n)}_{=\frac{1}{(-n)^{2k}} = \frac{1}{n^{2k}}}\Big).$$

$$= \operatorname{Res}(f,0) + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^{2k}},$$ d'où la formule cherchée.

6) Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\cot(x+iy) = \dfrac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}$

$$= \frac{\cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)}{\sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)} \quad \text{(formules d'addition).}$$

$\left|\begin{array}{l}\cos(iy) = ch(y)\\ \sin(iy) = i\, sh(y)\end{array}\right.$

$$= \frac{\cos(x)\, ch(y) - i\sin(x)\, sh(y)}{\sin(x)\, ch(y) + i\cos(x)\, sh(y)}.$$

Mais alors $|\cot(x+iy)|^2 = \dfrac{\cos^2 x\, ch^2 y + \sin^2 x\, sh^2 y}{\sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y}$.

$|u+iv|^2 = u^2+v^2$ si $u, v \in \mathbb{R}$.

$$= \frac{\cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)\, sh^2 y}{\sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)\, sh^2 y} = \frac{\cos^2 x + sh^2 y}{\sin^2 x + sh^2 y}.$$

$ch^2 = 1 + sh^2$

7) Si $Re(z) = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)$, alors $|\cot(\pi z)|^2 = \dfrac{sh^2 y}{1 + sh^2 y} \leq 1$. $(0 < 1 + sh^2 \leq sh^2)$

$\left|\begin{array}{l}\cos\left(\pm\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\right) = 0\\ \sin\left(\pm\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\right) = \pm 1\end{array}\right.$ $\quad$ $\Big|$ où $y = Im(\pi z)$

8) On a $\coth' = \left(\dfrac{ch}{sh}\right)' = \dfrac{ch'\, sh - ch\, sh'}{sh^2} = \dfrac{sh^2 - ch^2}{sh^2} = \dfrac{-1}{sh^2}$.

Par conséquent, si $t \in]0, \infty[$, $\coth'(t) = \dfrac{-1}{sh(t)^2} < 0$, donc $\coth$ décroît sur $]0, +\infty[$.

Par ailleurs, $\coth^2 = \dfrac{ch^2}{sh^2} = \dfrac{1 + sh^2}{sh^2}$.

Mais alors si $Im(z) = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)$, alors en posant $\pi z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$|\cot(\pi z)|^2 = \frac{\overbrace{\cos^2 x}^{\leq 1} + sh^2 y}{\underbrace{\sin^2 x}_{\geq 0} + sh^2 y} \leq \frac{1 + sh^2 y}{sh^2 y} = \coth^2 y = \coth^2\left(\pi\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\right) \leq \coth^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$\left|\begin{array}{l}y = \pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\\ \coth(-t) = -\coth(t)\end{array}\right.$ $\qquad$ $\coth$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\coth\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, on en déduit qu'alors :

$$|\cot(\pi z)| \leq \coth\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$

9) Il suffit de poser $K := \max(1, \coth(\frac{\pi}{2})) \times \pi$ (en fait $\frac{K}{\pi} = \coth(\frac{\pi}{2}) > 1$ car $e^{\pi/2} + e^{-\pi/2} > e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}$).

Alors si $z \in C_N$, on a, grâce aux questions 7 et 8, on a $|\cot(\pi z)| < \frac{K}{\pi}$, et donc :

$$|f(z)| = \frac{|\pi \cot(\pi z)|}{|z|^{2k}} \leq \frac{K}{|z|^{2k}} \leq \frac{K}{N^{2k}} \leq \frac{K}{N^2}$$

↳ $k \geq 1$.

↳ $|z| \geq \max(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|) \geq N + \frac{1}{2} \geq N$.

10) On utilise la majorat° :

$$|I_N| = \left| \int_{C_N} f \right| \leq \left(\sup_{z \in C_N} |f(z)| \right) \cdot \underbrace{L(C_N)} \leq \frac{K}{N^2} \cdot 4 \times (2N+1) \xrightarrow[N\infty]{} 0.$$

↳ périmètre de C_N

$= 4 \times (\underbrace{2N+1})$

↳ longueur d'un côté.

(Alternativement, on peut expliciter $\int_{C_N} f$ puis majorer des intégrales sur des segments, mais c'est plus compliqué).

11) Par passage à la limite $N \to +\infty$ dans la formule de la question 5, on obtient $\mathrm{Res}(f, 0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 0$, d'où le résultat.

12) $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ est définie là où $e^z \neq 1$, c-à-d sur $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.
holomorphe (comme quotient de fonctions hol)

En particulier, elle est bien définie et holomorphe sur $D^*(0, 2\pi) \subset \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

13) $\lim_{z \to 0} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^z - e^0}{z - 0} \right)$

$= \exp'(0) = \exp(0) = 1$, donc $\frac{z}{e^z - 1} \xrightarrow[z \to 0]{} 1$.

14) φ se prolonge donc par continuité en 0 (par $\varphi(0) := 1$), et on a vu dans le cours qu'un tel prolongement est holomorphe (0 est une singularité effaçable de φ).

15) φ est holomorphe sur $D(0, 2\pi)$, donc elle est développable en série entière en 0. De plus, elle coïncide avec son développement sur tout disque centré en 0 sur lequel elle est holomorphe : Si $\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est ce DSE en 0, l'égalité vaut pour tout z tq $|z| < 2\pi$. Il suffit alors de poser $B_n := n! a_n$.

16) $$\varphi(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{2}{e^z-1} + 1\right) = \frac{z}{2} \cdot \frac{2 + e^z - 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

Or $$\coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{ch\left(\frac{z}{2}\right)}{sh\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{2} \times \frac{2}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

$$= \frac{e^{-z/2}(e^z + 1)}{e^{-z/2}(e^z - 1)} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$ D'où le résultat.

(en fait pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i$)

17) g est paire $\iff 0 = g(z) - g(-z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n - \sum_{n\geq 0} a_n (-z)^n$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n \underbrace{(1 - (-1)^n)}_{= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}} z^n.$$ (pour z dans un disque centré en 0).

Or ce DSE définit la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, ce qui équivaut à $a_n = 0$ pour n impair.

18) $z \mapsto \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)$ est paire : $$\frac{-z}{2}\coth\left(\frac{-z}{2}\right) = -\frac{z}{2} \frac{ch\left(-\frac{z}{2}\right)}{sh\left(-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{z}{2} \frac{ch\left(\frac{z}{2}\right)}{-sh\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)$$

Par conséquent, $\varphi(z) - \frac{z}{2}$ est paire. Or son DSE en 0 est :

$$\varphi(z) - \frac{z}{2} = B_0 + \left(B_1 - \frac{1}{2}\right)z + \frac{B_2}{2} z^2 + \frac{B_3}{6} z^3 + \dots$$

Ainsi, la question 17 donne $B_1 - \frac{1}{2} = 0$ (c-à-d $B_1 = \frac{1}{2}$), et $B_n = 0$ si n est impair > 1.

(voir la quest° 20 pour la fin de cette quest°)

19) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\begin{cases} ch(iz) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z) \\ sh(iz) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\sin(z). \end{cases}$ (en particulier, $sh(iz)=0 \iff \sin(z)=0 \iff z\in\pi\mathbb{Z}$)

Donc si $z \notin \pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{ch(iz)}{sh(iz)} = \dfrac{\cos(z)}{i\sin(z)}$, i.e. $\cot(z) = i\coth(iz)$.

20) Soit $z \in D^*(0,1)$. Alors $z \notin \mathbb{Z}$, donc $\pi z \notin \pi\mathbb{Z}$, et $\cot(\pi z)$ est bien défini.

Puis $\pi z \cot(\pi z) \underset{\text{quest° 19}}{=} i\pi z \coth(i\pi z) = \dfrac{2i\pi z}{2}\coth\left(\dfrac{2i\pi z}{2}\right)$

$$\underset{\text{quest° 18}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\underbrace{(2i\pi z)^{2n}}_{= \underbrace{i^{2n}}_{=(i^2)^n=(-1)^n}\cdot(2\pi)^{2n}\cdot z^{2n}}$$

$(2i\pi z \neq 0$ et $|2i\pi z| = 2\pi|z| < 2\pi)$.

Finalement, $\forall z \in D^*(0,1)$, $\pi z\cot(\pi z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}z^{2n}$.

Ce qu'on a déjà écrit à la question 18 implique directement :

$\forall z \in D^*(0,2\pi)$, $\dfrac{z}{2}\coth\left(\dfrac{z}{2}\right) = \varphi(z) - \dfrac{z}{2} = B_0 + \dfrac{B_2}{2!}z^2 + \dfrac{B_4}{4!}z^4 + \dots$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$.

21) $f(z) = \dfrac{\pi z\cot(\pi z)}{z^{2k+1}} \underset{\text{si } z\in D^*(0,1)}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-2k-1}$ est un DSL.

Or $2n-2k-1 = -1 \iff k=n$, donc le coefficient de z^{-1} dans ce dvpt

est : $\text{Rés}(f,0) = (-1)^k\dfrac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$.

22) Des questions (11) et (21), on déduit :

$$\zeta(2k) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2}\text{Res}(f,0) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_{2k}.$$

23) $\dfrac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n \iff z = (e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n.$

Or $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{z^m}{m!}$. Par produit de Cauchy, on obtient :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,2\pi),\quad \underbrace{z}_{\text{C'est un DSE } (=0+z+0\cdot z^2+0\cdot z^3+\dots)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{B_k}{k!}\times\frac{1}{(n-k)!}\right)\right)}_{\text{pas de terme pour } k=n \text{ car le coeff constant de } e^z-1 \text{ est } =0.} z^n.$$

L'égalité entre ces DSE équivaut à l'égalité des coefficients, qui donne :

$$\underbrace{\forall n \geq 1}_{\text{(Pour } n=0\text{, on trouve } 0=0)},\quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

24) L'identité ci-dessus donne :

→ pour $n=1$: $\dfrac{B_0}{0!1!} = 1$, c-à-d $B_0 = 1$. (déjà connu : $B_0 = \varphi(0) = 1$ (quest° 13-14))

→ pour $n=2$: $\dfrac{B_0}{2} + B_1 = 0$, i.e. $B_1 = -\dfrac{1}{2}$. (déjà vu à la quest° 18)

→ pour $n=3$: $\dfrac{B_0}{6} + \dfrac{B_1}{2} + \dfrac{B_2}{2} = 0$, donc $B_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

→ pour $n=4$: $\dfrac{B_0}{24} + \dfrac{B_1}{6} + \dfrac{B_2}{4} + \dfrac{B_3}{6} = 0$, donc $B_3 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = 0$,

(ce qu'on savait déjà — quest° 18)

→ pour $n=5$: $\dfrac{B_0}{120} + \dfrac{B_1}{24} + \dfrac{B_2}{12} + \dfrac{B_3}{12} + \dfrac{B_4}{24} = 0$,

i.e. $B_4 = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{-6+15-10}{30} = -\dfrac{1}{30}$.

On en déduit : $* \underbrace{\zeta(2)}_{\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{(-1)^2}{2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2!} B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

(quest° 22 avec $k=1$ puis $k=2$)

(valeur bien connue)

$* \underbrace{\zeta(4)}_{\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}} = \frac{(-1)^3}{2} \cdot \frac{(2\pi)^4}{4!} B_4 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{16\pi^4}{24} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right)$

$= \boxed{\frac{\pi^4}{90}}$.

25) Si on essaie d'appliquer cette stratégie pour $2k+1$ au lieu de $2k$, on tombe directement sur un os : à la question 5, $\frac{1}{(-n)^{2k+1}} = -\frac{1}{n^{2k+1}}$, $\left(\neq \frac{1}{n^{2k+1}}\right)$

donc on obtient $I_N = \underbrace{2i\pi \operatorname{Res}(f,0)}$, égalité inutile.

↳ dont on peut d'ailleurs déduire du raisonnement de la question 21 que c'est zéro ...