Corrigé de l'examen du lundi 13/05/24.

Exercice 1.

1) On utilise le théorème des résidus, appliqué à $\varphi : z \longmapsto \dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}$, définie et holomorphe sur $\mathbb{C} - \{a, b\}$, et ayant un pôle simple en a et en b :

→ En a : $\varphi(z) = \dfrac{1}{z-a} \times \underbrace{\dfrac{f(z)}{z-b}}$

↳ holomorphe au vois. de a, donc DSE en a :

$$\frac{f(z)}{z-b} = \underbrace{\frac{f(a)}{a-b}}_{\text{terme cst.}} + \sum_{k\geq 1} a_k (z-a)^k$$

[valable car $a \neq b$].

$$\varphi(z) = \frac{f(a)}{a-b} \cdot \frac{1}{z-a} + \text{DSE en } a$$

Donc a est un pôle simple(1) de φ, et $\operatorname{Res}(\varphi, a) = \dfrac{f(a)}{a-b}$.

(1) Si $f(a) \neq 0$

(2) Si $f(b) \neq 0$

→ En b : Le même calcul donne que b est un pôle simple(2) de φ et que $\operatorname{Res}(\varphi, b) = \dfrac{f(b)}{b-a}$.

Rq : on peut aussi appliquer le théorème du cours pour le calcul du résidu de $\dfrac{g}{h}$ avec $g = f$ et $h(z) = (z-a)(z-b)$.

La condition $R > \max(|a|, |b|)$ assure que a et b sont dans le disque de centre 0 et de rayon R, donc $I(C_R, a) = I(C_R, b) = 1$.

D'après la formule des résidus :

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = 2i\pi \left(\frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a} \right) = 2i\pi \cdot \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

Remarquons que ce calcul est valable si $f(a)=0$ (resp. $f(b)=0$) : dans ce cas φ n'a pas de pôle en a (resp. en b), et $\mathrm{Res}(\varphi,a)$ (resp. $\mathrm{Res}(\varphi,b)$) n'apparaît pas dans le calcul, mais qu'on le fasse apparaître ou non ne change rien, puisque $\mathrm{Res}(\varphi,a)=\frac{f(a)}{a-b}=0$ (resp. $\mathrm{Res}(\varphi,b)=\frac{f(b)}{b-a}=0$) sous ces hypothèses.

2) Supposons qu'il existe $M>0$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}, |f(z)|\leq M$.

Alors si $m:=\max(|a|,|b|)$, on a, pour $z\in C_R$, $|z-a|\geq \underbrace{|z|}_{=R}-\underbrace{|a|}_{\leq m}\geq R-m$

et de même $|z-b|\geq R-m$, d'où :

$$\forall z\in C_R, \left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right|\leq\frac{M}{(R-m)^2}.$$

Ainsi, $$\left|\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right|\leq\frac{M}{(R-m)^2}\times\underbrace{2\pi R}_{\text{longueur de } C_R}=O\left(\frac{1}{R}\right)\xrightarrow[R\infty]{}0.$$

3) Si f est entière et bornée, on doit avoir, d'après les questions précédentes, $\underbrace{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}}_{\text{ne dépend pas de } R}\xrightarrow[R\infty]{}0$, donc $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=0$, i.e. $f(a)=f(b)$, pour tous $a,b\in\mathbb{C}$.

Donc f est constante.

Exercice 2.

1) En dérivant la relation $e^g = f$, on trouve $g'e^g = f'$, c'est-à-dire $g'f = f'$, donc $g' = \frac{f'}{f}$ (remarquons que $f = \exp \circ g$ ne s'annule pas puisque exp ne s'annule pas).

2) Si $h' = \frac{f'}{f}$, on a $\left(\frac{f}{e^h}\right)' = \frac{f'e^h - \overbrace{fh'}^{=f'}e^h}{(e^h)^2} = 0$.

3) Puisque U est étoilé, la fonction $\frac{f'}{f}$, qui est holomorphe sur U (f ne s'y annule pas) admet une primitive $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$.

D'après la question précédent, $\left(\frac{f}{e^h}\right)' = 0$, ce qui implique (par connexité de U) que $\frac{f}{e^h}$ est constante, égale à $C \in \mathbb{C}$.

Autrement dit, $f = Ce^h$.

Comme $f \neq 0$, on a $C \in \mathbb{C}^*$. Or $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective.

On en déduit qu'il existe $D \in \mathbb{C}$ tel que $e^D = C$.

Alors $f = e^D e^h = e^{h+D}$, et $g := h + D$ est un logarithme de f.

4) S'il existe $z \in U$ tel que $f(z) = 0$, alors $f(z)$ ne peut pas être de la forme $e^{g(z)}$ (toujours $\neq 0$), donc f ne peut pas admettre de logarithme.

Cependant, si U n'est pas étoilé, il peut y avoir des fonctions hol. ne s'annulant pas sur U mais n'ayant pas de logarithme.

Un exemple est donné par $f : z \longmapsto z$ sur $U = \mathbb{C}^*$.

En effet, $f'/f : z \longmapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$, son intégrale le long de $C(0,1)$ valant $2i\pi$ ($\neq 0$).

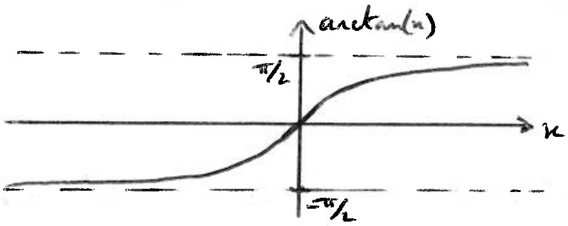
5) $e^{g_1} = e^{g_2} \iff e^{g_1 - g_2} = 0 \iff g_1 - g_2$ à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Comme $\begin{cases} U \text{ est connexe} \\ g_1 - g_2 \text{ est continue} \\ 2i\pi\mathbb{Z} \text{ est discret} \end{cases}$, on en déduit que $g_1 - g_2$ est constante, égale à $2i\pi k$, pour un certain k.

Rq: On en déduit que si U est un ouvert connexe, l'ensemble des logarithmes d'une fonction f donnée est soit vide, soit $\{g + 2ik\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain g tel que $e^g = f$.

Exercice 3

1) L'arctangente réelle est la bijection réciproque de $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$.



2) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$ telles que $f_1|_{U\cap\mathbb{R}} = \arctan|_{U\cap\mathbb{R}} = f_2|_{U\cap\mathbb{R}}$, alors $f_1 = f_2$ sur tout U.

Ceci résulte du principe du prolongement analytique, puisque :

- $\to U$ est connexe.
- $\to U \cap \mathbb{R}$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}$, (U est ouvert dans $\mathbb{C}$ et $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$).
  donc contient un point d'accumulation.
  (tous ses points sont des points d'accumulation).

De plus, si elle existe, l'unique $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f|_{U\cap\mathbb{R}} = \arctan|_{U\cap\mathbb{R}}$ vérifie $\tan \circ f(z) = z$ si $z \in U \cap \mathbb{R}$.

Les fonctions $\tan \circ f$ et $z \mapsto z$ sont holomorphes sur U et coïncident sur $U \cap \mathbb{R}$, donc elles coïncident sur U (encore grâce au principe du prolongement analytique). Donc $\forall z \in U,\ \tan(f(z)) = z$.

3) $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, donc $\tan' = \dfrac{\sin'\cos - \cos'\sin}{\cos^2} = \dfrac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)^2 = 1 + \tan^2$.

On peut alors dériver la relation $\tan(f(z)) = z$ (vraie pour tout $z \in U$ par la question précédente) pour obtenir :

$\forall z \in U,\ f'(z)\tan'(f(z)) = 1$, c'est-à-dire : $f'(z)\,(1 + \underbrace{\tan^2(f(z))}_{=z^2}) = 1$,

ce qui équivaut, si $1 + z^2 \neq 0$, à $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

Cette condition équivaut à $z^2 \neq -1$, donc à $z \neq \pm i$, qui vaut pour tout z dans U, par hypothèse.

f doit aussi vérifier $f(z_0) = \arctan(z_0)$ pour n'importe quel $z_0 \in U \cap \mathbb{R}$ (qui existe car $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$).

4) Si f vérifie $\begin{cases} \forall z \in U,\ f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2} \\ \exists z_0 \in U \cap \mathbb{R},\ f(z_0) = \arctan(z_0) \end{cases}$, alors sur l'intervalle

$U \cap \mathbb{R}$, on a $(f - \arctan)' = 0$, donc $f - \arctan$ est constante.

Comme elle est nulle en z_0, elle est nulle sur tout l'intervalle, c'est-à-dire que $\forall z \in U \cap \mathbb{R},\ f(z) = \arctan(z)$.

Si maintenant U est étoilé et ne contient pas $\pm i$, alors $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$, qui est holomorphe sur U étoilée, y admet une primitive f.

Quitte à ajouter une constante à f, on obtient une fonction vérifiant les deux conditions ci-dessus. De la première partie de la question, on déduit que f est bien une solution au problème posé.

5) On a $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k z^{2k}$ dès que $|z^2|<1$, i.e. dès que $|z|<1$.

(DSE de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour $|x|<1$).

On cherche $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ vérifiant les conditions de la question 3, pour $U = D(0,1)$ (disque ouvert) et $z_0 = 0$, c'est-à-dire $\begin{cases} f'(z) = \frac{1}{1+z^2} & (\forall z \in U) \\ f(0)=0. \end{cases}$

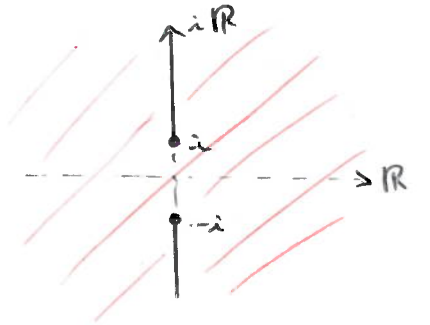
Il suffit de primitiver terme-à-terme(*) le développement de $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ ci-dessus : $f(z) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$.

(dès que $|z|<1$)

D'après la question 4, c'est bien une solution au problème, sur $U = D(0,1)$.

(*) Rappelons qu'on a bien $\forall z \in D(0,1)$, $f'(z) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{\cancel{(2k+1)} z^{2k}}{\cancel{2k+1}} = \frac{1}{1+z^2}$.

6)



$U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)i$

C'est un ouvert étoilé par rapport à 0 : Si $z \in U$, $\underbrace{[0,z]}_{\{tz \,/\, t\in[0,1]\}} \subset U$.

En effet, si $\mathrm{Re}\, z \neq 0$, alors $\forall t \in]0,1]$, $\mathrm{Re}(tz) = t\,\mathrm{Re}(z) \neq 0$ donc $tz \in U$ (et $0 \in U$.

Et si $\mathrm{Re}\, z = 0$, $z \in U \iff |z|<1$, et alors $|tz|<1$ $(\forall t \in [0,1])$.

7) $z \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une bijection de $\mathbb{C}-\{-i\}$ dans $\mathbb{C}-\{-1\}$: Pour $y\neq -1$ et $z \neq -i$,

$$y = \frac{1+iz}{1-iz} \overset{z\neq -i}{\iff} (1-iz)y = 1+iz$$

$$\iff y-1 = iz(1+y)$$

$$\underset{y\neq -1}{\iff} z = \underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i}\left(\frac{y-1}{1+y}\right) = i\,\frac{1-y}{1+y};$$

donc φ est bijective, d'inverse $y \longmapsto i\,\frac{1-y}{1+y}$, entre $\mathbb{C}-\{-i\}$ et $\mathbb{C}-\{-1\}$.

Si maintenant $z = ix$ avec $x \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$, on a :

$\varphi(z) = \frac{1-x}{1+x}$. Or, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ envoie $\begin{cases}]-\infty,-1[\text{ sur }]-\infty,-1[\\ [1,+\infty[\text{ sur }]-1,0] \end{cases}$

(on peut faire un tableau de variations pour s'en convaincre).

On en déduit que φ envoie le complémentaire de U dans $\mathbb{C}-\{i\}$ (qui est $\{ix \,/\, x \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[\}$) sur $\mathbb{R}_- - \{-1\}$, qui est le complémentaire de $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{C}-\{-1\}$. Par passage aux complémentaires, φ induit une bijection entre U et $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$.

8) On rappelle que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \times \frac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}$.

Donc $\tan(x) = \underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i} \frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = i \cdot \frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = \varphi^{-1}(e^{2ix})$.

↳ sauf si $e^{2ix} = -1$, c'est-à-dire si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, qui est justement l'ensemble des x tels que $\tan(x)$ n'est pas définie.

Par ce qui précède, on a bien, là où $\tan(x)$ est définie :

$$\tan(x) = z \iff \varphi^{-1}(e^{2ix}) = z$$

$$\iff e^{2ix} = \varphi(z) = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

9) Soit f la solution au problème posé sur U.

(On sait que f existe (question 4) et est unique (question 2).)

La question 2 nous dit aussi que $\forall z \in U$, $\tan(f(z)) = z$.

(et une fonction vérifiant ceci est évidemment une solution).

Or d'après la question précédente, puisque $z \neq -i$,

$$\tan(f(z)) = z \iff e^{2i f(z)} = \frac{1+iz}{1-iz}. \quad (*)$$

D'après la question 7, si $z \in U$, $\frac{1+iz}{1-iz} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

Rappelons que la partie principale du logarithme est une fonction holomorphe $\mathrm{Log} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\begin{cases} \rightarrow \mathrm{Log}(1) = 0 \\ \rightarrow e^{\mathrm{Log}(z)} = z \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-) \end{cases}$$

(ces conditions déterminent en fait Log).

Ainsi, si on pose $f(z) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, on obtient une fonction holomorphe sur U, qui vérifie $(*)$, donc est bien l'unique prolongement holomorphe de l'arctangente réelle à U.