Corrigé de l'examen d'analyse complexe

du 24/06/24.

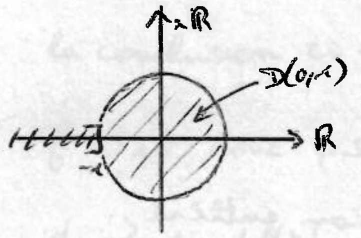
Exercice 1.

1) Si $z \notin]-\infty, -1]$, alors $1+z \notin \mathbb{R}_-$, donc $\mathrm{Log}(1+z)$ est bien défini, et $f(z)$ l'est. De plus, f est une composée de fonctions holomorphes, donc elle est holomorphe.

Si maintenant $z \in U$, on a $f'(z) = \alpha \mathrm{Log}'(1+z) e^{\alpha \mathrm{Log}(1+z)}$

(grâce à la formule de dérivation d'une composée, avec $\begin{cases} \mathrm{Log}'(u) = \frac{1}{u} \\ \exp' = \exp \end{cases}$) $= \dfrac{\alpha}{1+z} e^{\alpha \mathrm{Log}(1+z)} = \dfrac{\alpha}{1+z} f(z)$.

2) f est holomorphe, donc DSE au voisinage de 0.



Comme U contient le disque unité ouvert $D(0,1)$, f est holomorphe sur $D(0,1)$. Le théorème du cours assure alors que $R \geq 1$ (et que f coïncide avec son DSE en 0 sur tout $D(0,1)$).

3) On a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ au voisinage de 0 (en fait sur $D(0,1)$).

On sait que $\forall z \in U$, $f'(z) = \dfrac{\alpha}{1+z} f(z)$.

Dans un voisinage de 0, on a donc $(1+z) \sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1} = \alpha \sum_{n \geq 0} a_n z^n$,

c'est-à-dire $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1} + \sum_{n \geq 0} n a_n z^n = \sum_{n \geq 0} \alpha a_n z^n$. $(*)$

On $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n \quad \left(= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots\right)$

$\hookrightarrow = 0$ si $n=0$.

(*) devient $\sum_{n\geq 0} \left((n+1)a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n\right) z^n = 0$. (pour z dans un voisinage de 0).

par le thm d'addition des séries entières.

Par unicité des coefficients du développement en série entière (de la fonction nulle), on obtient :

$$\forall n \geq 0, \ (n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n = 0.$$

Autrement dit : $\forall n \geq 0 : \ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$.

b) * Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $a_{\alpha+1} = \frac{\alpha-\alpha}{\alpha+1} a_\alpha = 0$ et $\forall k \geq \alpha+1, \ a_k = 0$.

(par une récurrence immédiate.)

Alors le développement en série entière de f en 0 est fini, donc de rayon de convergence ∞ (c'est un polynôme, de degré $\leq \alpha$).

La somme de cette série définit alors une fonction entière, qui coïncide avec f sur un voisinage de 0, donc sur tout l'ouvert connexe U (par le théorème du prolongement analytique).

C'est donc un prolongement de f en une fonction entière.

Rq : En fait, dans ce cas, $\alpha = \underbrace{1+1+\dots+1}_{\alpha \text{ fois}}$, donc, si $z \in U$:

$$f(z) = e^{\alpha \log(1+z)} = e^{\log(1+z) + \dots + \log(1+z)} = e^{\log(1+z)} \times \dots \times e^{\log(1+z)}$$

$$= \left(e^{\log(1+z)}\right)^\alpha = (1+z)^\alpha. \text{ (qui est alors un polynôme).}$$

* <u>Si $\alpha \notin \mathbb{N}$</u>, on a $a_0 = f(0) = e^0 = 1$, et $\forall n \geq 0$, $\frac{\alpha - n}{n+1} \neq 0$, donc (par un récurrence immédiate) les a_n sont tous $\neq 0$.

De plus, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n-\alpha}{n+1}\right| = \left|\frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right| \xrightarrow[n\infty]{} 1$, donc $R = 1$ par le critère de Dirichlet.

Supposons alors (par l'absurde) qu'on puisse prolonger f en une fonction analytique au voisinage de -1, c'est-à-dire qu'il existe $r > 1$ tel que f se prolonge par continuité à $]-r, -1]$ et que ce prolongement soit holomorphe. Comme f est déjà holomorphe sur $D(0,r) \setminus]-r,-1]$ (qui est inclus dans U), ce prolongement $\tilde{f}$ serait holomorphe sur $D(0,r)$ tout entier. Le rayon de convergence de son DSE en 0 serait alors $\geq r$. Mais ce DSE en 0 est celui de f, puisque $\tilde{f} = f$ au voisinage de 0. On en déduit que $R \geq r > 1$, ce qui contredit la conclusion ci-dessus (que $R = 1$).

f n'est donc pas prolongeable en une fonction analytique au voisinage de -1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

5) On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$ (en traitant à part le cas $n = 0$).

→ <u>Pour $n = 0$</u> : $a_0 = f(1) = e^0 = 1 = \binom{\alpha}{0}$.

→ <u>Pour $n = 1$</u> : $a_1 = \frac{\alpha - 0}{0+1} a_0 = \alpha = \binom{\alpha}{1}$.

→ Supposons $a_n = \binom{\alpha}{n}$ pour un certain $n \geq 1$.

Alors $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha - n)\cdot \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha - n+1)}{(n+1)\cdot n!}$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1)+1)}{(n+1)!} = \binom{\alpha}{n+1}.$$

Ce qui achève la récurrence.

On retrouve ainsi la formule $(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n$, à partir de la définition de $(1+z)^\alpha$ comme $e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$.

6) On rappelle que $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{2}}$ où Arg est l'argument principal ($\in]-\pi, \pi[$)

$(z = |z| e^{i\operatorname{Arg}(z)})$ (si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$).

Autrement dit, $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln|z| + i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$, comme attendu.

7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \left(e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+z^2)}\right)^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+z^2)} = f(z^2)$, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Question comprise au montage

(définie pour $z^2 \notin]-\infty, -1]$, c'est-à-dire pour $z \notin \{\pm it \,/\, t \in [1, +\infty[\}$, donc pour $z \in V := \mathbb{C} \setminus (\pm i[1, +\infty[)$:

)

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} z^{2n}$.

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{1}{n!}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\right)}_{=\left(-\frac{1}{2}\right)^n (1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1))}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\,\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times 2n}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\times 2^n}$$

$$= (-1)^n\cdot\frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\underbrace{\binom{2n}{n}}_{=\frac{(2n)!}{n!^2}}.$$

Puis argsh est la primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ s'annulant en 0 (qui existe sur V étoilé), donc :

$$\operatorname{argsh}(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)}\binom{2n}{n} z^{2n+1}.$$

Exercice 2.

1) $$\int_C \frac{dz}{z^2-6z+1} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{2it}-6e^{it}+1} \quad \text{(par définition)}.$$

$\hookrightarrow t \mapsto e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$

Si on écrit $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, on trouve :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2(\theta)} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{-4}}$$

$$= -4 \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{e^{2i\theta}-6+e^{-2i\theta}} = 4i \cdot \int_0^{\pi} \frac{ie^{2i\theta}d\theta}{e^{4i\theta}-6e^{2i\theta}+1}$$

Il suffit alors de poser $\begin{cases} t = 2\theta \\ dt = 2d\theta \end{cases}$ pour obtenir :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = 2i \int_C \frac{dz}{z^2-6z+1}.$$

2) z^2-6z+1 a pour discriminant $\Delta = 6^2-4 = 32$.

Le polynôme a donc pour racines $\dfrac{6\pm\sqrt{32}}{2} = 3\pm2\sqrt{2}$.

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Or $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, donc :

$$\begin{cases} 3+2\sqrt{2} > 1 \\ 3-2\sqrt{2} \simeq 0{,}2 \text{ appartient au disque unité.} \end{cases}$$

Il y a donc une seule racine $\alpha = 3-2\sqrt{2}$ dans le disque unité (ouvert).

3) $z^2-6z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$ avec $\begin{cases}\alpha = 3-2\sqrt{2} \in]-1,1[. \\ \beta = 3+2\sqrt{2} > 1\end{cases}$

Donc en posant $f(z) := \dfrac{1}{z-\beta}$, on a :

$\dfrac{1}{z^2-6z+1} = \dfrac{f(z)}{z-\alpha}$, où f est holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0,1)$.

La formule de Cauchy donne alors $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2-6z+1} = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-\alpha} = 2i\pi\, f(\alpha)$.

Rq: On pourrait aussi appliquer le théorème des résidus pour faire ce calcul.

$= 2i\pi \cdot \dfrac{1}{\alpha-\beta} = \dfrac{2i\pi}{-4\sqrt{2}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = 2i \times \frac{2i\pi}{-4\sqrt{2}} = \frac{-4\pi}{-4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 3

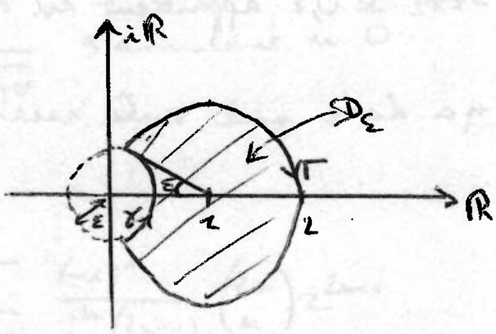
1) f est clairement bien définie et holomorphe sur $U-\{1\}$.

Il faut montrer que $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = -1$.

Or $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(z)}{1-z} = -\dfrac{\mathrm{Log}(1)-\mathrm{Log}(z)}{1-z} \xrightarrow[z\to 1]{} -\mathrm{Log}'(1) = -1$.

La fonction f est donc bien continue en 1, qui était donc une singularité effaçable de $z \mapsto \dfrac{\mathrm{Log}(z)}{1-z}$. On en déduit qu'elle est holomorphe en 1, et donc sur U tout entier.

2) $D_\varepsilon = \underbrace{\overline{D}(1,1)}_{\{z / |z-1| \leq 1\}} \setminus \underbrace{D(0,\varepsilon)}_{\{z/ |z| < \varepsilon\}}$



4

3) $\underbrace{\partial D_\varepsilon}_{\text{chemin fermé}} \subset U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ et $\begin{cases} U \text{ est étoilé (par rapport à } 0) \\ f \text{ est holomorphe sur } U. \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_{\partial D_\varepsilon} f = 0$.

4) a) γ est un arc du cercle $C(0,\varepsilon)$, donc sa longueur $L(\gamma)$ est plus petite que $L(C(0,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon$ (en fait $L(\gamma) \leq \pi\varepsilon$ car γ est plus petit qu'un demi-cercle de rayon ε).

b) Si $|z| = \varepsilon$, alors $\begin{cases} |1-z| \geq |1-|z|| = 1-\varepsilon. \\ \mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \end{cases}$

donc $|\mathrm{Log}(z)| \leq |\ln\varepsilon| + |i\,\mathrm{Arg}\,z| \leq \ln\varepsilon + \pi$.

Ainsi, $|f(z)| = \dfrac{|\mathrm{Log}(z)|}{|1-z|} \leq \dfrac{\ln\varepsilon + \pi}{1-\varepsilon}$.

c) $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \sup_t |f(\underbrace{\gamma(t)}_{\in C(0,\varepsilon)})| \leq \pi\varepsilon \cdot \frac{\ln\varepsilon + \pi}{1-\varepsilon}$

Or $\varepsilon\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\pi\varepsilon\ln\varepsilon + \pi^2\varepsilon}{1-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où la conclusion voulue.

5) a) Γ est paramétré par $t \mapsto 1 + e^{it}$ pour $t \in [\pi+\delta, \pi-\delta]$,

où $\delta \in]0,\pi[$ est tel que $|\underbrace{1+e^{i(\pi-\delta)}}_{=1-e^{-i\delta}}| = \varepsilon$ (δ est l'angle indiqué sur le dessin ci-dessus).

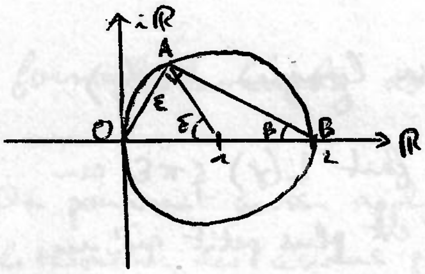
Il est clair que $\delta \to 0$ si $\varepsilon \to 0$ $(*)$

De cette paramétrisation, on déduit :

$$\int_\Gamma f = \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \frac{\mathrm{Log}(1+e^{it})}{1-(1+e^{it})}\, ie^{it}\,dt = \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \frac{\mathrm{Log}(1+e^{it})}{-\cancel{e^{it}}}\, i\cancel{e^{it}}\,dt$$

$$\int_\Gamma f = \int_{-\pi+\delta}^{\pi+\delta} -i\,\mathrm{Log}(1+e^{it})\,dt .$$

(*) On peut déduire une formule explicite pour δ soit algébriquement à partir de $|1-e^{-i\delta}| = \varepsilon$, ou géométriquement, à partir de :



Preuve géométrique :

$\rightarrow \sin\beta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (dans le triangle rectangle OAB, $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$)

$\Downarrow \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\beta = \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\rightarrow \delta = 2\beta$ (théorème de l'angle au centre).

$\rightarrow \underline{\delta = 2\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$

Preuve algébrique :

$$|1-e^{-i\delta}| = \Big|\underbrace{e^{-i\frac{\delta}{2}}}_{\text{de module } 1}\overbrace{\left(e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}\right)}^{2i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\Big|$$

$$= \left|2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|$$

$$= 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \left(\delta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\right).$$

Donc $|1-e^{i\delta}| = \varepsilon \iff \varepsilon = 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \iff \underline{\delta = 2\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$.

b) $$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{>0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}.$$

Donc $\mathrm{Log}(1+e^{i\theta}) = \ln\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\in]-\pi,\pi[}$

$\uparrow$

$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$.

c) D'après les questions précédentes, $0 = \int_{D_\varepsilon} f = \underbrace{\int_\gamma f}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} + \underbrace{\int_\Gamma f}_{= \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} -i\,\mathrm{Log}(1+e^{i\theta})\,d\theta}$

Comme δ tend vers 0 si ε tend vers 0,

on a $$0 = \lim_{\delta\to 0}\left(-i\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}\left(\ln\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + i\frac{\theta}{2}\right)d\theta\right).$$

On $\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \frac{\theta}{2}\, d\theta = 0$, donc :

$$0 = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}\left(\overbrace{\ln 2}^{\text{cste}} + \underbrace{\ln\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)}_{\substack{\text{fonction paire}\\ \text{de } \theta .}}\right)d\theta\right)$$

$$0 = \lim_{\delta\to 0}\left((2\pi-2\delta)\ln 2 + 2\int_0^{\pi-\delta}\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta\right)$$

Finalement, $\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta = -\pi\ln 2$, d'où par $\left|\begin{array}{l} t=\frac{\theta}{2}\\ dt=\frac{d\theta}{2}\end{array}\right.$:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$$