Examen du lundi 5 mai 2025

Durée : 2h. Aucun document et aucun appareil électronique n'est autorisé. On pourra librement utiliser les éléments de trigonométrie hyperbolique rappelées à la fin du sujet

Questions de cours

1) Donner l'énoncé du théorème de l'application ouverte et celui du principe du maximum pour les fonctions analytiques, et démontrer le second à partir du premier.

2) Déduire de la formule de Cauchy que toute fonction holomorphe est analytique.

Exercice : quand $\mathrm{Log}(ab)$ est-il égal à $\mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$?

Rappelons que Log (resp. Arg) désigne la branche principale du logarithme (resp. l'argument principal).

1) Notons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $\mathrm{Log}(j)$ et $\mathrm{Log}(j^2)$, et en déduire que $\mathrm{Log}(j^2) \neq 2\,\mathrm{Log}(j)$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. À quelles conditions sur $\mathrm{Arg}(a)$ et $\mathrm{Arg}(b)$ le produit ab est-il un réel négatif ?

Dans les question 3 à 6, on fixe $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

3) En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f_a : z \mapsto \mathrm{Log}(az)$. On fera un ou plusieurs dessin(s).

4) Calculer la dérivée de f_a sur son ensemble de définition Ω_a.

5) En déduire que $f_a - \mathrm{Log}$ est constante sur tout ouvert connexe sur lequel elle est définie.

6) Que vaut $f_a(1)$? Et $f_a(i)$, en fonction de $\mathrm{Log}(a)$? (discuter en fonction de la valeur de $\mathrm{Arg}(a)$).

7) Montrer que si $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ vérifient $|\mathrm{Arg}(a) + \mathrm{Arg}(b)| < \pi$, alors $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$.
On pourra s'appuyer sur les dessins de la question 3.

Problème : Calcul des $\zeta(2k) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{2k}}$

Le personnage principal de ce problème est la fonction *cotangente* cot, dont on rappelle qu'elle est par définition l'inverse de la tangente, c'est-à-dire que $\cot := \frac{\cos}{\sin}$.

Une intégrale de chemin

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On définit f par $f(z) := \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^{2k}}$. Si $N \in \mathbb{N}^*$, on considère le carré C_N de sommets $\left(N + \frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$, qu'on oriente de sorte qu'il tourne autour de 0 dans le sens direct. Enfin, on pose $I_N := \int_{C_N} f(z)dz$.

1) Dessiner C_N (pour $N = 2$ ou $N = 3$) et donner un paramétrisation de chacun de ses côtés.

2) Déduire les solutions de $\sin(z) = 0$ de celles de $e^z = 1$, et en déduire que f est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble discret de points, qui sont des pôles de f.

3) Établir la liste des pôles de f à l'intérieur de C_N, et les ajouter sur le dessin de la question 1.

4) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $\mathrm{Rés}(f, n) = \frac{1}{n^{2k}}$.

5) En déduire que $I_N = 2i\pi\left(\mathrm{Rés}(f, 0) + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}}\right)$.

Estimation de I_N

6) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\cot(x + iy)|^2 = \frac{\cos^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}{\sin^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}$.

7) En déduire que si $\mathrm{Re}(z) = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)$, alors $|\cot(\pi z)| < 1$

8) Montrer que la fonction coth est décroissante sur $]0, +\infty[$, et que $\coth^2 := \frac{1+\mathrm{sh}^2}{\mathrm{sh}^2}$. En déduire que si $\mathrm{Im}(z) = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)$, alors $|\cot(\pi z)| \leqslant \coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

9) En déduire qu'il existe $K > 0$ indépendant de N telle que si $z \in C_N$, alors $|f(z)| \leqslant \frac{K}{N^2}$.

10) Montrer que I_N tend vers 0 si N tend vers $+\infty$.

11) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Rés}(f, 0)$.

Le résidu de f en 0.

On considère la fonction $\varphi : z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$.

12) Montrer que φ est bien définie et holomorphe sur le disque ouvert $\mathbb{D}(0, 2\pi)$ privé de 0, noté $\mathbb{D}^*(0, 2\pi)$.

13) Montrer que $\frac{z}{e^z-1}$ tend vers une limite finie quand z tend vers 0.

14) En déduire que φ se prolonge par continuité en 0. Pourquoi ce prolongement (encore noté φ) est-il holomorphe sur tout $\mathbb{D}(0, 2\pi)$?

15) En déduire qu'on peut définir les *nombres de Bernoulli* B_n par : $\frac{z}{e^z-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ si $|z| < 2\pi$.

16) Montrer que $\varphi(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{D}^*(0, 2\pi)$.

17) Montrer que si $g(z) = \sum_{m \geqslant 0} a_m z^m$ définit une fonction paire sur un voisinage de 0, alors $a_m = 0$ si m est impair. *On pourra considérer le développement en série entière de $z \mapsto g(z) - g(-z)$ en 0.*

18) En déduire que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et que $B_n = 0$ si n est impair > 1, puis que pour tout $z \in \mathbb{D}^*(0, 2\pi)$, on a l'égalité $\frac{z}{2} \coth\left(\frac{z}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

19) Justifier l'identité $\cot(z) = i \coth(iz)$, dont on précisera pour quels $z \in \mathbb{C}$ elle est valable.

20) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}^*(0, 1)$, on a $\pi z \cot(\pi z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$.

21) En déduire le développement en série de Laurent de f au voisinage de 0, puis calculer $\text{Rés}(f, 0)$ en fonction en fonction d'un nombre de Bernoulli.

Conclusions

22) Exprimer $\zeta(2k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ en fonction d'un nombre de Bernoulli.

23) En multipliant l'égalité définissant les B_i par $e^z - 1$, prouver que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1, \\ 0 \text{ si } n > 1. \end{cases}$

24) Calculer B_i pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.

25) Pourquoi cette stratégie de calcul ne fonctionne-t-elle pas pour calculer $\zeta(2k + 1)$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) ?

En fait, le calcul des $\zeta(2k+1)$ est beaucoup plus compliqué que celui des $\zeta(2k)$ effectué ici. Par exemple, on ne connaît pas à ce jour de formule close pour calculer $\zeta(3)$. En particulier, si la formule qu'on a retrouvée ici pour $\zeta(2)$ permet de déduire directement son irrationalité (et même sa transcendance) de celle de π, ce n'est qu'en 1978 que Roger Apéry a démontré que $\zeta(3)$ est irrationnel (et on ne sait toujours pas s'il est transcendant). La question de l'irrationalité des $\zeta(2k+1)$ (dont on conjecture même qu'ils sont algébriquement indépendant sur $\mathbb{Q}(\pi)$) est toujours ouverte pour $k \geqslant 2$. En 2000, Tanguy Rivoal a démontré qu'une infinité d'entre eux sont irrationnels. En 2001, Wadim Zudilin a démontré que l'un au moins des quatre nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnel.

Rappels de trigonométrie hyperbolique

On rappelle que la fonction *cosinus hyperbolique* ch (resp. la fonction *sinus hyperbolique* sh) est définie par la formule $\text{ch}(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ (resp. $\text{sh}(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$), si bien que pour tout z, on a $\cos(iz) = \text{ch}(z)$ et $\sin(iz) = i\,\text{sh}(z)$. Remarquons également que pour tout z, on a $\text{ch}(-z) = \text{ch}(z)$ et que $\text{sh}(-z) = -\text{sh}(z)$. La fonction *cotangente hyperbolique* est définie par $\coth := \frac{\text{ch}}{\text{sh}}$. Rappelons que sh et ch sont définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$, et qu'on peut vérifier facilement que $\text{sh}' = \text{ch}$ et que $\text{ch}' = \text{sh}$. De plus, on rappelle que, de même que la formule $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, la formule $\text{ch}^2(z) - \text{sh}^2(z) = 1$ est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.