Examen du lundi 13 mai 2024

Durée : 2h. Aucun document et aucun appareil électronique n'est autorisé.

Questions de cours

1) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme ; pourquoi est-elle holomorphe ?

2) Déduire de la formule de Cauchy que toute fonction holomorphe est analytique.

Exercice 1 : Le théorème de Liouville à partir de la formule des résidus

Soit f une fonction entière.

1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Notons C_R le cercle de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct, pour un certain $R > \max(|a|, |b|)$. Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$. On prendra garde aux cas où $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$.

2) Supposons f bornée. Montrer que l'intégrale précédente tend vers 0 si R tend vers l'infini.

3) En déduire le théorème de Liouville.

Exercice 2 : Logarithmes de fonctions holomorphes

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Un *logarithme* de f sur U est une fonction $g : U \to \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in U$.

1) Supposons qu'il existe un logarithme g de f sur U. Exprimer g' en fonction de f et f'.

2) Supposons que f'/f admette une primitive h. Calculer la dérivée de f/e^h.

3) Supposons que U soit un ouvert étoilé et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer que f admet un logarithme sur U.

4) Pourquoi la condition de non-annulation est-elle nécessaire ? Montrer que si U n'est pas étoilé, elle n'est pas toujours suffisante (penser à la fonction $z \mapsto z$).

5) Supposons U connexe. Si f admet deux logarithmes g_1 et g_2 sur U, que peut-on dire de $g_1 - g_2$?

Exercice 3 : La fonction arctangente

Rappelons que les fonctions trigonométriques usuelles sont définies à partir de l'exponentielle par les formules : $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, et $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

1) Rappeler la définition de la fonction arctangente réelle, et esquisser un dessin de son graphe.

On s'intéresse aux prolongement de arctan en une fonction holomorphe. Précisément, on cherche un ouvert connexe U tel que $U \cap \mathbb{R}$ soit un intervalle non vide de $\mathcal{R}$ et f holomorphe sur U qui vérifie $f(z) = \arctan(z)$ si $z \in U \cap \mathbb{R}$.

2) Utiliser le principe de l'unicité du prolongement analytique pour montrer qu'étant donné U, un tel f est unique s'il existe, et doit vérifier $\tan(f(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

3) Rappeler pourquoi $\tan' = 1 + \tan^2$, puis en déduire que si $\pm i \notin U$, on doit avoir $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ pour tout $z \in U$. Remarquer qu'on doit aussi avoir $f(z_0) = \arctan(z_0)$ pour un certain $z_0 \in U \cap \mathbb{R}$.

4) Réciproquement, si f vérifie les deux conditions de la question précédente, pourquoi a-t-on $f(z) = \arctan(z)$ si z est réel ? En déduire qu'il existe une solution f dès que U est étoilé et $\pm i \notin U$.

5) En développant $\frac{1}{1+z^2}$ en série entière autour de $z = 0$, trouver une série entière qui définit une solution du problème, sur un disque U centré en 0 que l'on précisera.

Prenons maintenant pour U l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{ix \mid x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 1\}$.

6) Dessiner U, puis expliquer pourquoi c'est un ouvert étoilé.

7) Montrer que $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, puis entre U et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

8) Soient $x, z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq -i$. Montrer que $z = \tan(x)$ si et seulement si $e^{2ix} = \frac{1+iz}{1-iz}$.

9) Déduire des questions précédentes que l'unique solution f au problème posé sur U est donné par $f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, où Log désigne la branche principale du logarithme.