Examen du lundi 24 juin 2024

Durée : 2h. Aucun document et aucun appareil électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, Log désigne la branche principale du logarithme.

Questions de cours

1) Rappeler la définition de la branche principale de la racine carrée ; pourquoi est-elle holomorphe ?

2) Énoncer et prouver le théorème de Liouville.

Exercice 1 : fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons $U = \mathbb{C} \backslash]-\infty, -1]$. Pour $z \in U$, on pose $f(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$.

1) Justifier que f est bien définie et holomorphe sur U, puis montrer que $f'(z) = \frac{\alpha}{1+z} f(z)$ pour $z \in U$.

2) Pourquoi f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Soit R le rayon de convergence du développement correspondant. Pourquoi a-t-on $R \geqslant 1$? (on fera un dessin).

3) Notons $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0. Déduire de la question 1 que pour tout $n \geqslant 0$, on doit avoir $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$.

4) En déduire que $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$. Que vaut R si $\alpha \in \mathbb{N}$? En déduire que f ne se prolonge en une fonction analytique au voisinage de -1 que si $n \in \mathbb{N}$, et qu'alors elle se prolonge en une fonction entière.

5) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, qu'on note aussi $\binom{\alpha}{n}$ (qui vaut par convention 1 si $n = 0$). Quelle est la formule qu'on a ainsi retrouvée ?

6) Justifier que pour $\alpha = 1/2$, on a $f(z) = \sqrt{1+z}$, où $\sqrt{-}$ est la branche principale de la racine carrée.

Exercice 2 : Une intégrale trigonométrique

1) Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin(\theta)^2} = 2i \int_C \frac{dz}{z^2 - 6z + 1}$, où C désigne le cercle unité orienté dans le sens direct. On pourra commencer par écrire le membre de gauche sous la forme d'une intégrale sur $[0, 2\pi]$.

2) Montrer que le polynôme $z^2 - 6z + 1$ a une seule racine α dans le disque unité, que l'on déterminera.

3) En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin(\theta)^2}$. On pourra par exemple écrire $\frac{1}{z^2-6z+1}$ sous la forme $f(z)/(z-\alpha)$.

Exercice 3 : Un calcul intégral

Pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on pose $f(z) = \frac{\operatorname{Log}(z)}{1-z}$ si $z \neq 1$, et $f(1) = -1$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. En déduire qu'elle est holomorphe sur cet ouvert.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1 \text{ et } |z| \geqslant \varepsilon\}$. On oriente le bord ∂D_ε dans le sens direct.

2) Dessiner D_ε.

3) Que vaut $\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)dz$?

Découpons le chemin ∂D_ε en deux arcs de cercles γ (de rayon ε) et Γ (de rayon 1).

4a) Donner une borne pour la longueur de γ.

4b) Majorer $|f(z)|$ si $|z| = \varepsilon$.

4c) En déduire que $\int_\gamma f(z)dz$ tend vers 0 si ε tend vers 0.

5a) Montrer que $\int_\Gamma f(z)dz = -i \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \operatorname{Log}(1+e^{i\theta})d\theta$, pour un certain $\delta > 0$ qui dépend de ε et qui tend vers 0 si ε tend vers 0. On donnera une définition géométrique de δ.

Question bonus : trouver une formule explicite pour δ en fonction de ε.

5b)Calculer $\operatorname{Log}(1+e^{i\theta})$, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

5c) En déduire que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.