TD4 : Fonctions analytiques

Quelques exemples

Exercice 1 (Développements explicites). Justifier que les fonctions suivantes sont analytiques au voisinage de $z = 1$, et donner les trois premiers termes du développement en série entière en ce point:
1) $z \mapsto \frac{z^2}{z-2}$, 2) $z \mapsto \frac{(z-2)}{z(z+1)}$, 3) $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$.

Exercice 2 (Fractions rationnelles). Le but de cet exercice est de montrer qu'une fraction rationnelle définit toujours une fonction analytique sur son domaine de définition, et d'étudier la convergence de son développement en série entière en un point. Précisément, si $R = P/Q \in \mathbb{C}(T)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[T]$ premiers entre eux, et si $z_0 \in \mathbb{C}$ n'est pas un *pôle* de R (c'est-à-dire pas une racine de Q), on va montrer que $z \mapsto R(z)$ est définie par la somme de son développement de Taylor en z_0 sur le disque ouvert $D(z_0, \rho)$, où ρ est la distance minimale entre z_0 et un pôle de R.

1) Admettons pour le moment que R est analytique sur son domaine de définition. Avec les notations ci-dessus, pourquoi le rayon de convergence du développement en z_0 doit-il être plus petit que ρ ?

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et soit $z_0 \in \mathbb{C} - \{\lambda\}$. En se ramenant au développement de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ en 0, développer $z \mapsto \frac{1}{z-\lambda}$ en série entière en z_0. En déduire le résultat pour $R(T) = \frac{1}{T-\lambda}$.

3) En déduire le résultat pour $R(T) = \frac{1}{(T-\lambda)^n}$, si $n \in \mathbb{N}$.

4) Rappeler pourquoi le polynôme Q est nécessairement scindé. Utiliser le théorème de développement en éléments simple des fractions rationnelles pour conclure dans le cas général.

5) Donner les rayons de convergence des développements en série entière de l'exercice précédent.

Principe des zéros isolés/du prolongement analytique

On admet pour le moment que la composée de deux fonctions analytiques est analytique

Exercice 3 (Zéros qui s'accumulent). Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$ est analytique sur le disque unité ouvert. Quels sont ses zéros sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 4 (Applications). Trouvez toutes les fonctions f analytiques sur le disque unité ouvert qui vérifient la condition :
1) $f(e^{it}/2) = e^{it}/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 (Un anneau intègre). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et f et g deux fonctions analytiques sur U. Montrer que si $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Principe du maximum

Exercice 6 (Formulation alternative). Soit f une fonction continue sur un disque fermé D, analytique sur l'intérieur de D.

1) Pourquoi $|f|$ atteint-elle son maximum sur D ?

2) Montrer que ce maximum est atteint sur le bord du disque.

3) Généraliser cette conclusion en remplaçant le disque D par un compact K, et en remplaçant le bord du dique par la frontière ∂K de K, obtenue en ôtant à K son intérieur.

Exercice 7 (Un exemple d'application). Trouver le maximum de $|z^2 - 3z + 2|$ sur le disque unité fermé (*i.e.* pour $|z| \leqslant 1$), et en quels points il est atteint.

Exercice 8 (Fonctions réelles sur le bord). Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue sur $\overline{U}$, analytique sur U. Supposons que f soit à valeurs réelles sur $\partial U = \overline{U} - U$. En appliquant le principe du maximum à e^{if} et à e^{-if}, montrer que f est constante.

Problème : automorphismes analytiques du disque unité

Notons $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert. On cherche à déterminer tous les *automorphismes analytiques* de $\mathbb{D}$, c'est-à-dire les bijections analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ dont la réciproque est analytique. *NB : On verra bientôt que la réciproque d'une bijection analytique est toujours analytique ; la dernière hypothèse est donc redondante.*

Partie 1 : Le lemme de Schwarz

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, à valeurs dans $\mathbb{D}$, fixant 0 (*i.e.* telle que $f(0) = 0$).

1) Montrer que la formule $g(z) := f(z)/z$ définit une fonction g holomorphe sur $\mathbb{D} - \{0\}$, puis qu'elle peut être prolongée par continuité en 0. On note encore g son prolongement à $\mathbb{D}$ tout entier.

2) En considérant le développement en série entière de f en 0, montrer que g est en fait analytique sur $\mathbb{D}$.

3) Utiliser le principe du maximum (appliqué dans $D(0, r)$, pour $r < 1$) pour montrer que $|g(z)| \leqslant 1$ sur $\mathbb{D}$.

4) En déduire que $|f'(0)| \leqslant 1$ et que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|f(z)| \leqslant |z|$.

5) En reprenant le raisonnement des deux questions précédentes, montrer que si $|f'(0)| = 1$ ou si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \in \mathbb{D}$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on ait $f(z) = e^{it}z$.

Partie 2 : Une famille d'automorphismes

Pour $\alpha \in \mathbb{D}$ fixé, posons :

$$\psi_\alpha : z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

1) Pourquoi ψ_α est-elle analytique sur $\mathbb{D}$?

2) Montrer que $\psi_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, puis que ψ_α est un automorphisme analytique de $\mathbb{D}$ (on déterminera explicitement sa bijection réciproque).

3) Que vaut $\psi_\alpha(0)$?

Partie 3 : Déterminations des automorphismes

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorphisme analytique de $\mathbb{D}$.

1) Supposons que $\varphi(0) = 0$. Déduire du lemme de Schwarz que $|\varphi'(0)| = 1$, puis qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que φ soit la multiplication par e^{it}.

2) Dans le cas général, posons $\beta := \varphi(0)$. Justifier que $\psi_\beta^{-1} \circ \varphi$ est un automorphisme analytique de $\mathbb{D}$ qui fixe 0. On pourra montrer que l'ensemble des automorphismes analytiques de $\mathbb{D}$ est un groupe pour la composition.

3) Déduire des deux questions précédentes qu'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}.$$