TD3 : Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$; 2) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{n\sin(n)} z^n$; 4) $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} z^{n!}$; 6) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

1) a_n est la n-ième décimale de π ;

2) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge ;

3) $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$; 4) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; 5) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 3. On s'intéresse à certaines conséquences de la formule d'Hadamard pour le calcul des rayons de convergence.

1) Fixons $k \geqslant 0$. Montrer que $\sqrt[n]{n^k}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

2) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $\sqrt[n]{|P(n)|}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

3) Exprimer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} P(n) a_n z^n$ en fonction de celui de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

4) Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ pour $a_n = \frac{2^n \ln(n)}{3n^5+n+1}$?

Exercice 4. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Soient également $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $c_n := \frac{s_n}{n+1}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$ et de $h(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$

2) Exprimer g en fonction de f.

3) Écrire une équation différentielle dont h est solution, en fonction de f.

Calculs avec les séries entières

Exercice 5. Calculer les termes d'ordre $\leqslant 3$ dans le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

1) $e^z \sin(z)$, 2) $\sin(z)\cos(z)$, 3) $\frac{e^z-1}{z}$, 4) $\frac{1}{\cos(z)}$, 5) $\frac{e^z-\cos(z)}{z}$, 6) $\tan(z)$, 7) $\frac{e^z}{\sin(z)}$.

Exercice 6. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série convergente.

1) Montrer que $z \mapsto f(-z)$ et $z \mapsto -f(-z)$ sont aussi des sommes de séries entières convergentes.

2) En déduire un critère pour que f soit paire (resp. impaire).

Exercice 7. Chercher toutes les séries entières $f(z) = \sum a_n z^n$ qui vérifient $f(z^2) = f(z)^2$.

Exercice 8 (Suites récurrentes)**.** Les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$, et on note R son rayon de convergence.

1) Montrer par récurrence que $F_n \leqslant 2^n$. En déduire que $R > 0$.

2) Exprimer $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} z^n$ en fonction de f.

3) En déduire que f coïncide avec une fraction rationnelle sur son disque de convergence.

4) Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, puis développer ces éléments simples en série entière. En déduire une expression explicite pour F_n en fonction de n.

5) Réfléchir aux généralisations possibles de ce qu'on vient de faire.

Exercice 9. Le but de cet exercice est d'étudier $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2) Montrer que $f'(z) = -\frac{Log(1-z)}{z}$ sur tout le disque de convergence.

Exercice 10 (Nombres de Bernouilli)**.** On définit les *nombres de Bernouilli* B_n par :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

1) Prouver que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1, \\ 0 \text{ si } n > 1. \end{cases}$

2) Calculer B_i pour $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Montrer que $B_n = 0$ si n est impair $\neq 1$.

3) Montrer que $\frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$, puis que $\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$.

4) Exprimer les développements en série entière en 0 de $\tan(z)$, $z/\sin(z)$ et $z/\tan(z)$ en fonction des nombres de Bernouilli.