TD2 : Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1 (similitudes du plan)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice, notée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même dont M est la matrice dans la base canonique. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique, noté $\langle -, - \rangle$.

1) Écrire une équation sur a, b, c et d équivalente au fait que f envoie les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ sur des vecteurs orthogonaux. Même question avec $(1,1)$ et $(1,-1)$.

2) Résoudre le système de deux équations obtenu à la question (1), en fonction de a et b. *On pourra multiplier la deuxième équation par c^2 et utiliser la première pour éliminer d, afin de se ramener à une équation du second degré en c^2.*

3) Soit M une matrice vérifiant les conditions précédentes. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle f(u), f(v) \rangle = (a^2 + b^2)\langle u, v \rangle$.

4) Rappelons que l'angle non-orienté entre deux vecteurs non nuls $u, v \in \mathbb{R}^2$ est l'unique $\theta(u,v) \in [0, \pi]$ vérifiant $\cos(\theta(u,v)) = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$. Rappeler pourquoi cet angle est bien défini.

5) Déterminer les M telles que f préserve les angles non-orientés.

6) En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ comme d'habitude (via $(x,y) \mapsto x+iy$), montrer que f préserve les angles non-orientés si et seulement si f est de la forme $z \mapsto \alpha z$ ou $z \mapsto \alpha \bar{z}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

7) L'angle orienté entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ est $\pm\theta(u,v) \in [-\pi, \pi]$, où $\pm$ est le signe de $\det(u,v)$ (vous pouvez vérifier la cohérence de cette définition avec votre définition préférée). Parmi les applications ci-dessus, lesquelles préservent les angles orientés ?

Exercice 2. Pour chacune des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes, déterminer les points de $\mathbb{C}$ où la fonction est $\mathbb{C}$-dérivable :

1) $f(x+iy) = x^2 + 2x - y^2 + 2i(1+x)y$, 2) $g(x+iy) = y^2\sin(x) + iy$,

3) $h(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$, 4) $k(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$,

6) $l(x+iy) = (-e^x\sin(y) + 3) + i(e^x\cos(y) - 5)$,

Aux points où elle existe, donner leur dérivée en fonction de $z = x+iy$.

Exercice 3. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$. Pour quelles valeurs de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 4. Soit u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = xy^2 - x^3/3$.

1) Montrer que u est harmonique.

2) Trouver les fonctions v telles que $f : x+iy \longmapsto u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe.

3) Pouvez-vous exprimer f directement en fonction de $z = x+iy$?

4) Reprendre les questions précédentes avec $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$.

Exercice 5. Les paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$ étant fixés, soit u la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1) À quelles conditions sur a, b et c la fonction u est-elle harmonique ?

2) Trouver les fonctions v telles que $f : x+iy \longmapsto u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe.

3) Pouvez-vous exprimer f directement en fonction de $z = x+iy$?

Exercice 6. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, et notons $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ comme d'habitude. Supposons que $\partial_x u + \partial_y v = 0$. Montrer que f' est constante.

Exercice 7. Montrer que si la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U est constante, alors f est constante sur U.

Exercice 8. Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On considère $f(z)$ comme une fonction de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ via $z = x+iy$.

1) Montrer que les équations de Cauchy-Riemann peuvent se réécrire sous la forme plus compacte:

$$\partial_x f + i\partial_y f = 0.$$

On note $\partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$ *et* $\partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$.

2) Vérifier que $\partial_x f = \partial_z f + \partial_{\bar{z}} f$ et $i\partial_y f = \partial_z f - \partial_{\bar{z}} f$, puis que $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \bar{f}$ et $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \bar{f}$ (où $\bar{f}$ désigne la fonction $z \mapsto \overline{f(z)}$).

3) Supposons que f est $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 \in U$. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $(\partial_{\bar{z}} f)(z_0) = 0$, et qu'alors $f'(z_0) = (\partial_z f)(z_0)$.

4) Utiliser les questions précédentes pour retrouver le fait que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$, $\bar{f}$ l'est aussi si et seulement si $f'(z_0) = 0$.

5) Vérifier que si g est définie (sur $\bar{U}$) par $g(z) = f(\bar{z})$, on a, pour tout $z_0 \in \bar{U}$, $(\partial_{\bar{z}} g)(z_0) = (\partial_z f)(\overline{z_0})$. En déduire que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $\overline{z_0}$

6) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\partial_{\bar{z}}\partial_z f = \partial_z \partial_{\bar{z}} f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(x+iy)$ soit un polynôme en x et en y. Montrer que f est holomorphe si et seulement si c'est un polynôme. *On pourra écrire* f *en fonction de* $z = x+iy$ *et de* $\bar{z} = x - iy$.