TD1 : Rappels sur les nombres complexes – dérivabilité

Nombres complexes : rappels

Exercice 1. Exprimer sous forme algébrique et sous forme polaire les nombres complexes suivants :
1) $a = e^{i\pi/3} - 1$; 2) $b = (1+i)(\sqrt{3}+i)$; 3) $c = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = 0$;
4) $d = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$; 5) $e = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ pour $n \geqslant 1$.
6) $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *On pourra mettre* $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *en facteur.*

Exercice 2. Prouver, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équivalence : $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
1) $z^2 = 1 + i$; 2) $z^2 = -5 + 12i$; 3) $(3+i)z^2 - (8+6i)z + 25 + 5i = 0$;
4) $z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 = 0$ (*Indication : vérifier que* $1+i$ *est solution*) ;
5) $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$, sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure ;
6) $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \geqslant 1$ entier fixé.

Exercice 4. Déterminer, dans chaque cas, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant:
1) $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = r$ avec $r \neq 0$ fixé, où Re désigne la partie réelle,
2) $z^3 \in \mathbb{R}$ et $z^3 \leqslant 8$,
3) $|z + i| = |z - i|$,
4) $|z - \alpha| < |1 - \bar{\alpha}z|$ avec $\alpha \in \mathbb{D}(0,1) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$,
5) $|z| = |1 - z| = |\frac{1}{z}|$.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
1) Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ème de l'unité, i.e. $\omega^n = 1$ et $\omega^\ell \neq 1$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant n-1$. Montrer que toute racine n-ème de l'unité s'écrit ω^k pour un certain entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
2) Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, soit $\arg(\alpha) \in [0, 2\pi[$ la détermination principale de son argument. Montrer que toute solution de $z^n = \alpha$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$z = \sqrt[n]{|\alpha|} \exp\left(\frac{i}{n}\arg(\alpha)\right)\omega^k$$

avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et ω une racine primitive n-ème de l'unité.
3) En déduire que les sommets d'un polygône régulier à n côtés du plan complexe sont d'affixes respectives $z_k = a\omega^k + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ et ω une racine primitive n-ème de l'unité.

Fonction exponentielle

Exercice 6. On rappelle qu'on définit (provisoirement) la fonction exponentielle complexe à partir des fonctions réelles exp, cos et sin: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

1) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, $e^{u+v} = e^u e^v$.

2) Montrer que $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

3) En déduire que $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z' - z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

4) Montrer que $z \mapsto e^z$ induit une bijection entre $\mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$.

1) À l'aide de la forme trigonométrique de z, montrer que $\lim_{n\to+\infty} |(1 + \frac{z}{n})^n| = |\exp(z)|$.

2) Pourquoi a-t-on $\arg(w^n) = n \cdot \arg(w)$ et $\arg(w) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Re}(w)}\right)$ si $\mathrm{Re}(w) > 0$?

3) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\arg(\exp(z)) = \lim_{n\to+\infty} \arg\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)$. (*Indication : on pourra utiliser un développement limité*).

4) Conclure quant à la limite souhaitée.

Sinus et cosinus

Exercice 8. (Fonctions sinus et cosinus). On définit le sinus et le cosinus d'un nombre complexe z par :

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

1) En définissant la fonction exponentielle comme dans l'exercice 6, montrer que cette définition permet d'étendre les fonction réelles sinus et cosinus (supposées connues) à tout le plan complexe.

2) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$.

3) Démontrer la *formule de Moivre* : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{C},\ (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$.

4) Démontrer que pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b). \end{cases}$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $\cos(az) = 0$ avec $a > 0$ réel fixé,

2) $\sin(az) = 0$ avec $a > 0$ réel fixé,

3) $\cos(z) = i$.

Exercice 10. (Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$).

1) Soit $u := \exp(\frac{2i\pi}{5})$. Montrer que $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$.

2) Posons $a := u^4 + u$ et $b := u^3 + u^2$. Montrer que $a + b = ab = -1$. En déduire une équation du second degré donc a et b sont solutions, puis les valeurs possibles de a.

3) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4) En déduire la valeur de $\sin(\frac{2\pi}{5})$.

5) Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$.

Exercice 11. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus 1$, on a $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.

2) En déduire que $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Dérivabilité des fonctions complexes

Exercice 12. (Fonctions trigonométriques). Les fonctions sinus et cosinus sont définies comme dans l'exercice 8.

1) Montrer que $\sin, \cos \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, et calculer leurs dérivées.

2) On définit la fonction tangente par $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Où est-elle définie ? Justifier qu'elle est holomorphe sur son domaine de définition, et calculer sa dérivée.

3) On définit les fonctions hyperboliques ch, sh et th par $\mathrm{ch}(z) := \cos(iz)$, $\mathrm{sh}(z) := -i\sin(iz)$ et $\mathrm{th}(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)}$. Reprendre les questions précédente pour ces fonctions.

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. On définit $\overline{f}$ par $\overline{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$.

1) Montrer que si $z \in U$ et $h \in \mathbb{C}$ tend vers 0, on a $\frac{\overline{f}(z+h)-\overline{f}(z)}{h} = \overline{f'(z)} \cdot \frac{\overline{h}}{h} + o(1)$.

2) Que vaut $\overline{h}/h$ si $h \in \mathbb{R}$? Et si $h \in i\mathbb{R}$? En déduire que $\overline{f}$ est dérivable en z ssi $f'(z) = 0$.

3) À quelle condition $\overline{f}$ est-elle holomorphe sur U ? (utiliser le résultat de l'exercice 15).

4) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que $z \mapsto P(\overline{z})$ n'est dérivable (au sens complexe) qu'en un nombre fini de points.

Exercice 14. Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$, soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\gamma : [0,1] \to D$ une fonction $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer que $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est dérivable, et calculer sa dérivée. On pourra écrire des taux d'accroissements ou des développements limités.

2) Supposons que $f' = 0$. Montrer qu'alors $f \circ \gamma$ est constante (*on pourra considérer sa partie réelle et sa partie imaginaire comme des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$), et donc que $f(\gamma(1)) = f(\gamma(0))$.

3) Rappeler pourquoi il existe un chemin $\mathcal{C}^1$ entre deux points quelconques de D.

4) Montrer que si $f' = 0$ sur D, alors f est constante.

Exercice 15. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et f une fonction holomorphe sur U, de dérivée nulle. On rappelle que f est alors constante sur tout disque inclus dans U (Exercice 14). Fixons $z_0 \in U$, et posons $X := \{z \in U \mid f(z) = f(z_0)\}$.

1) Montrer que X est fermé dans U. *On pourra considérer une suite de points de X ayant une limite dans U.*

2) Soit $z \in X$. Montrer que X contient un disque ouvert de centre z. En déduire que X est ouvert dans U.

3) En déduire que $X = U$, donc que f est constante. Que dire si U n'est pas connexe ?

Exercice 16. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1) Supposons que f est à valeurs réelles. Soit $z \in U$. En écrivant $f'(z)$ comme limite d'un taux d'accroissement, montrer que $f'(z) \in \mathbb{R}$, et aussi que $f'(z) \in i\mathbb{R}$. En déduire que $f' = 0$, donc que f est constante (utiliser l'exercice 15).

2) Que dire si f est à valeurs imaginaires pures ?

Exercice 17. Définir une branche principale de la fonction racine cubique. Précisément, on cherche une fonction f de $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{C}$ envoyant 1 sur 1 et telle que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, $f(z)^3 = z$. Peut-on prolonger cette fonction à $\mathbb{C}^*$ tout entier ?

Annexe : Constructions du corps des nombres complexes

Exercice 18. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes suivantes pour deux éléments (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y) + (x',y') := (x+x', y+y'), \\ (x,y) \times (x',y') := (xx' - yy', xy' + x'y). \end{cases}$$

1) Vérifier que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps. Que vaut $(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1)$?

Avec $i := (0,1)$, on écrit désormais $z = x + iy$ plutôt que $z = (x, y)$ pour $z \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Avec ces notations, x est la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}(z)$) et y est la partie imaginaire de z (notée $\mathrm{Im}(z)$).

2) On identifie $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$, via $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$. Montrer que c'est une application $\mathbb{R}$-linéaire et un morphisme de corps.

3) Vérifier que les deux manières de multiplier un nombre complexe $z = x + iy$ par un nombre réel λ (la multiplication externe donnée par $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ et celle interne, donnée par $\lambda \times z$, en tenant compte de l'identification de la question 2,) coïncident.

3) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on note $\bar{z} := x - iy$ le conjugué de z. Vérifier que l'application $z \mapsto \bar{z}$ est un isomorphisme de corps, qu'elle est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire.

4) Pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$, on note $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ le module de z. Vérifier que $z \mapsto |z|$ définit une norme sur $\mathbb{C}$.

5) Montrer les formules $2\,\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$, $2\,\mathrm{Im}(z) = z - \bar{z}$, et $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Exercice 19. (Version alternative de celui du dessus) L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini comme l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels de la forme

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2) Montrer que $\mathbb{C}$, muni de l'addition et du produit des matrices, est un corps. Calculer $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2$.

3) Montrer que l'application $\lambda \mapsto \lambda I_2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est un morphisme de corps. On identifie $\mathbb{R}$ avec son image par ce morphisme, et on pose

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit désormais $z = x + iy$ plutôt que

$$z = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Avec $x, y \in \mathbb{R}$. Avec ces notations, x est la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}(z)$) et y est la partie imaginaire de z (notée $\mathrm{Im}(z)$).

4) Reprendre les question 3-4-5 de l'exercice ci-dessus avec ces nouvelles définitions.

5) Alternativement, montrer que $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ définit un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ tel que défini dans l'exercice précédent et la version définie ci-dessus en termes de matrices.