TD 1 - Correction

Nombres complexes : rappels

Exercice 1.
1) On a $e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc la forme algébrique de a :

$$a = e^{i\pi/3} - 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ensuite, on a $|a|^2 = (\frac{-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, donc $|a| = 1$. On a donc la forme polaire de a :

$$a = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{2i\pi/3}.$$

2) Par double distributivité, on a la forme algébrique de b

$$b = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + i^2 = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1).$$

Ensuite, on a $|b|^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8$, donc $|b| = 2\sqrt{2}$. On a donc

$$b = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Pour trouver la forme polaire de b, on doit trouver θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

À moins d'être très astucieux, cela ne se devine pas... En revanche, on peut calculer la forme polaire de b en calculant la forme polaire de $b_1 = 1 + I$ et $b_2 = \sqrt{3} + i$. On a $|b_1|^2 = 2$ et $|b_2|^2 = 4$, donc

$$b_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ et } b_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$$

On a donc la forme polaire de b :

$$b = b_1 b_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{6\pi+4\pi}{24}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

3) On a

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1}{5} + i\frac{2}{5}.$$
$$\frac{2-i}{5i} = \frac{(2-i)(-5i)}{(5i)(-5i)} = \frac{-10i+5i^2}{-25i^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

D'où la forme algébrique de c :

$$c = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{-1}{5} + i\frac{2}{5} - \frac{1}{5} - i\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}.$$

Pour la forme polaire, on rappelle que $-1 = e^{i\pi}$, d'où $x = \frac{2}{5}e^{i\pi}$ la forme polaire de c.

4) On peut développer $d(1+i\sqrt{3})^n$ en utilisant le binôme de Newton, mais ça donne des calculs terriblement compliqués. Plus simplement, on commence par calculer la forme polaire de $1+i\sqrt{3}$. On a $|1+i\sqrt{3}|^2 = 1+3 = 4$, donc

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

On en déduit que $d = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ est la forme polaire de d. La forme algébrique, quant à elle, est donnée par

$$d = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

5) Par définition, e est j fois la $n-1$-ème somme partielle de la série géométrique de raison $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$. On a alors

$$e = \frac{j - j^{n+1}}{1-j} = j\frac{1-j^n}{1-j}.$$

On a $j^3 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1$, donc

$$\forall n \geqslant 1,\ j^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ j & \text{si } n \equiv 1[3], \\ j^2 & \text{si } n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

On en déduit que

$$e = \begin{cases} j\frac{1-1}{1-j} = 0 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ j\frac{1-j}{1-j} = j & \text{si } n \equiv 1[3], \\ j\frac{1-j^2}{1-j} = j\frac{(1-j)(1+j)}{1-j} = j(1+j) = j + j^2 = -1 & \text{si } n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

6) La forme algébrique de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ est donnée par

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) + \cos(\beta) + i\sin(\beta) = (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) + i(\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

Pour la forme polaire, on a

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + \overline{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}}\right) \\ &= 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\Re\mathrm{e}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

Si $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ est positif, ceci est bien la forme polaire voulue. Sinon, la forme polaire voulue est donnée par

$$2\cos\left(\pi + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi\right)}.$$

Exercice 2. Comme $z \neq i$, on a $\overline{z} \neq -i$ donc $\overline{z} + i \neq 0$. On pose $\alpha := \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$, on veut montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$. On a

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i} &\Leftrightarrow \alpha\overline{z} + i\alpha = i\overline{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow \overline{z}(\alpha - i) = 1 - i\alpha. \end{aligned}$$

Si $\alpha - i = 0$, alors $1 - i\alpha = 1 - i^2 = 1 + 1 = 0$, ce qui est clairement faux. On peut donc diviser par $\alpha - i$ pour obtenir.

$$\overline{z} = \frac{1 - i\alpha}{\alpha - i}.$$

On pose a présent $\alpha = a + ib$ la forme algébrique de α. On a

$$\overline{z} = \frac{1 - i(a + ib)}{(a + ib) - i} = \frac{1 - ia + b}{a + i(b - 1)}$$

Le carré du module de z (égal à $|\overline{z}|^2$) est alors donné par

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \frac{|1 + b - ia|^2}{|a + i(b - 1)|^2} \\ &= \frac{(1 + b)^2 + a^2}{a^2 + (b - 1)^2} \\ &= \frac{1 + 2b + b^2 + a^2}{a^2 + b^2 - 2b + 1}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} |z| = 1 &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2b + b^2 + a^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1 \\ &\Leftrightarrow 2b = -2b \\ &\Leftrightarrow b = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 3.

1) On cherche les racines du nombre complexe $1 + i$.
Première méthode : On calcule la forme polaire de $1 + i$. On a $|1 + i|^2 = 1 + 1 = 2$, donc

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Maintenant que nous avons la forme polaire de $1 + i$, il est facile d'en extraire les racines : elles sont données par $z = \pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}$.
Deuxième méthode : Soit $z = a + ib$ une racine de $1 + i$, on a $z^2 = 1 + i = z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, et $|z|^2 = a^2 + b^2 = |1 + i| = \sqrt{2}$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 + \sqrt{2} \\ 2b^2 = \sqrt{2} - 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

On constate que $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ sont tous deux des réels positifs, il est donc possible d'en prendre des racines réelles. L'équation $2ab = 1 > 0$ force a et b à avoir le même signe. Les deux racines de $1 + i$ sont donc données par

$$a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, b = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \text{ et } a = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

En combinant les deux méthodes, on vient de trouver une méthode pour calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$! Dans les exemples suivant, on aura tendance a utiliser la deuxième méthode, qui est juste calculatoire et évite de devoir calculer des arguments de nombres complexes.

2) On applique la méthode précédente : Si $z = a + ib$ est solution de l'équation, alors

$$\begin{cases} z^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = |-5 + 12i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 18 \\ ab = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 3 \\ ab > 0 \end{cases}$$

On a donc deux solutions $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = -2-3i$.

3) Pour éviter des calculs trop compliqués, on divise le polynôme considéré par son coefficient dominant. On a

$$\frac{8+6i}{3+i} = \frac{(8+6i)(3-i)}{3^2+1} = \frac{24+6+18i-8i}{10} = 3+i$$

$$\frac{25+5i}{3+i} = \frac{(25+5i)(3-i)}{3^2+1} = \frac{75+5+i(15-25)}{10} = 8-i$$

L'équation considérée est alors équivalente à $z^2-(3+i)z+(8-i)=0$. Pour résoudre cette équation, on calcule

$$\Delta = (3+i)^2 - 4(8-i) = 9-1-32+4i = -24+10i = 2(-12+5i).$$

On doit calculer les racines de Δ dans $\mathbb{C}$. On résout

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -24 \\ 2ab = 10 \\ a^2+b^2 = \sqrt{4(144+25)} = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ ab = 5 \\ 2b^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 5 \\ ab = 5 \end{cases}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\pm(1+5i)$. Les solutions de l'équation de départ sont alors données par

$$z_1 = \frac{3+i+1+5i}{2} = 2+3i \text{ et } z_2 = \frac{3+i-(1+5i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i.$$

4) On pose $P(X) = X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 - 3X + 1$. On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc

$$(1+i)^2 = 2e^{i\pi/2} = 2i,\ (1+i)^3 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2(1-i),\ (1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P(1+i) &= -4 - 3.2(1-i) + \frac{9}{2}.2i - 3(1+i) + 1 \\ &= -4-6+6i+9i-3-3i+1 = 0 \end{aligned}$$

On sait alors que le polynôme P est divisible par $(X-(1+i))$. Par ailleurs, P est un polynôme à coefficients réels. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\overline{P(z)} = \overline{z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1} = \overline{z}^4 - 3\overline{z}^3 + \frac{9}{2}\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 1 = P(\overline{z}).$$

Autrement dit, si $(1+i)$ est racine de P, $(1-i) = \overline{(1+i)}$ l'est également. On sait alors que $P(X)$ est divisible par $(X-(1+i))(X-(1-i)) = X^2-2X+2$. En calculant la division euclidienne des polynômes, on trouve

$$P(X) = (X^2-2X+2)(X^2-X+1/2).$$

Il reste donc à résoudre l'équation $z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$. Il s'agit d'une équation polynômiale de degré 2, et on calcule

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.\frac{1}{2} = 1-2 = -1.$$

Les solutions sont données par $z_1 = \frac{1-i}{2}$ et $z_2 = \frac{1+i}{2}$. Au final, on a

$$P(X) = (X-(1+i))(X-(1-i))\left(X - \frac{1-i}{2}\right)\left(X - \frac{1+i}{2}\right).$$

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont alors

$$1+i,\ 1-i,\ \frac{1-i}{2},\ \frac{1+i}{2}.$$

5) On pose $Q(X) = X^3 - (1+2i)X^2 + 3(1+i)X - 10(1+i) = 0$. On commence par chercher une solution imaginaire pure à l'équation $Q(z) = 0$. On considère $i\alpha \in i\mathbb{R}$, et on calcule

$$\begin{aligned} Q(i\alpha) &= (i\alpha)^3 - (1+2i)(i\alpha)^2 + 3(1+i)i\alpha - 10(1+i) \\ &= -i\alpha^3 + (1+2i)\alpha^2 + 3(1-i)\alpha - 10(1+i) \\ &= -i\alpha^3 + \alpha^2 + 2i\alpha^2 + 3i\alpha - 3\alpha - 10 - 10i \\ &= \alpha^2 - 3\alpha - 10 + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10). \end{aligned}$$

On a alors

$$Q(i\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0, \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0. \end{cases}$$

On résout d'abord $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$. On calcule $\Delta = 9 + 40 = 7^2$. Les solutions de $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$ sont donc

$$\alpha_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \text{ et } \alpha_2 = \frac{3-7}{2} = -2$$

Parmi ces deux réels, seul -2 est solution de la 2-ème équation, car

$$-(-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) - 10 = 0 \text{ et } -5^3 + 2.5^2 + 3.5 - 10 = -70$$

On a donc que $z = -2i$ est une solution de $Q(z) = 0$. Le polynôme $Q(X)$ est alors divisible par $(X+2i)$. En calculant la division euclidienne des polynômes, on trouve

$$Q(X) = (X+2i)(X^2 - (1+4i)X + 5(-1+i)).$$

Il reste à résoudre l'équation $z^2 - (1+4i)z + 5(i-1) = 0$. On calcule

$$\Delta^2 = (1+4i)^2 - 4.5(i-1) = (1 - 16 + 8i) - 20i + 20 = 5 - 12i = -(-5+12i)$$

D'après la question 2), les racines de Δ sont $i(2+3i) = -3+2i$ et $-i(2+3i) = 3-2i$. Les solutions de $z^2 - (1+4i)z + 5(i-1) = 0$ sont alors données par

$$\frac{1+4i+(-3+2i)}{2} = -1+3i \text{ et } \frac{1+4i+3-2i}{2} = 2+i$$

Au final, on a $Q(X) = (X+2i)(X-(-1+3i))(X-(2+i))$, et les solutions de $Q(z) = 0$ sont

$$-2i,\ -1+3i,\ 2+i.$$

6) Pour $n = 1$, l'équation devient $z - 1 = z + 1$, i.e. $-1 = 1$ qui est impossible : l'équation n'a pas de solutions. Pour $n \geqslant 2$, $z = 1$ n'est pas une solution car $(z+1)^n = 2^n \neq 0^n = (z-1)^n$. On peut donc écrire

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

Autrement dit, $\zeta = \frac{z+1}{z-1}$ est une racine n-ème de l'unité, différente de 1 car $z+1 \neq z-1$. On a donc $\zeta = \exp(\frac{2ik\pi}{n})$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{z+1}{z-1} &\Leftrightarrow \zeta z - \zeta = z + 1 \\ &\Leftrightarrow z(\zeta - 1) = 1 + \zeta \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1+\zeta}{\zeta - 1} \end{aligned}$$

Pour ζ une racine de l'unité, on a $|\zeta| = 1 = |\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta}$, on a donc

$$z = \frac{(1+\zeta)(\overline{\zeta}-1)}{(\zeta-1)(\overline{\zeta}-1)} = \frac{\overline{\zeta}+\zeta\overline{\zeta}-1-\zeta}{\zeta\overline{\zeta}-\overline{\zeta}-\zeta+1} = \frac{\overline{\zeta}+1-1-\zeta}{1-\overline{\zeta}-\zeta+1} = -\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{2-(\zeta+\overline{\zeta})}$$

Si $\zeta = \exp(\frac{2ik\pi}{n})$, alors $\zeta + \overline{\zeta} = 2\Re\mathrm{e}(\zeta) = 2\cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $\zeta - \overline{\zeta} = 2i\Im\mathrm{m}(\zeta) = 2i\sin(\frac{2k\pi}{n})$. On obtient

$$z = -\frac{2i\sin(2k\pi/n)}{2-2\cos(2k\pi/n)} = \frac{i\sin(2k\pi/n)}{\cos(2k\pi/n)-1},\ k \in [\![1, n-1]\!]$$

toutes les solutions de l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 4.
1) Si z est donné en forme algébrique par $a+ib$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Ainsi, on a $\Re\mathrm{e}(1/z) = \frac{a}{a^2+b^2}$. Fixant $r \neq 0$, on a

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{z}\right) = r \Leftrightarrow a = (a^2+b^2)r \Leftrightarrow a^2 - \frac{a}{r} + b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = a\left(\frac{1}{r} - a\right)$$

Comme b est réel, on doit chercher à savoir si $a(1/r-a)$ est positif ou non. Si $r > 0$, alors $a(1/r-a)$ est positif si et seulement si $1/r \leqslant a \leqslant 0$, auquel cas les solutions sont données par $b = \pm\sqrt{a(1/r-a)}$. Comme $a^2+b^2 = \frac{a}{r}$, on doit prendre $a \neq 0$. On a donc l'ensemble de solutions

$$\left\{(a, \sqrt{a(1/r-a)}) \mid 1/r \leqslant a < 0\right\} \sqcup \left\{(a, -\sqrt{a(1/r-a)}) \mid 1/r \leqslant a < 0\right\}$$

Si $r < 0$, alors $a(1/r-a)$ est positif si et seulement si $1/r \geqslant a \geqslant 0$, auquel cas les solutions sont données par $b = \pm\sqrt{a(1/r-a)}$. Comme $a^2+b^2 = \frac{a}{r}$, on doit prendre $a \neq 0$. On a donc l'ensemble de solutions

$$\left\{(a, \sqrt{a(1/r-a)}) \mid 1/r \geqslant a > 0\right\} \sqcup \left\{(a, -\sqrt{a(1/r-a)}) \mid 1/r \geqslant a > 0\right\}$$

2)On pose $z = re^{i\theta}$ la forme polaire de z. On a $z^3 = r^3e^{3i\theta}$ en forme polaire. On a donc $z^3 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $3\theta \equiv 0[\pi]$, autrement dit $\theta \equiv 0[\pi/3]$.
Si $\theta \equiv 0, 2\pi/3, 4\pi/3[2\pi]$, alors $z^3 = r^3$ est inférieur à 8 si et seulement si $r \leqslant 2$.
Si $\theta \equiv \pi/3, 3\pi/3, 5\pi/3[2\pi]$, alors $z^3 = -r^3$ est inférieur à 8 car $r > 0$. Les solutions sont donc données par

$$[0,2] \sqcup j[0,2] \sqcup j^2[0,2] \sqcup \left\{re^{i\theta} \mid \theta \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\right\}.$$

3) Géométriquement, on cherche les points du plan complexe à égale distance de i et de $-i$, autrement dit la médiatrice de ces deux points, clairement donnée par $\mathbb{R}$. Algébriquement, posons $z = a+ib$ la forme algébrique de $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}|z-i| = |z+i| &\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 2b = -2b \\ &\Leftrightarrow b = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat.

4) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{D}(0,1)$. Comme $|z-\alpha|$ et $|1-\overline{\alpha}z|$ sont des réels positifs, on a

$$|z-\alpha| < |1-\overline{\alpha}z| \Leftrightarrow |z-\alpha|^2 < |1-\overline{\alpha}z|^2$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
|z-\alpha|^2 &= (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) \\
&= z\overline{z} - \alpha\overline{z} - z\overline{\alpha} + \alpha\overline{\alpha} \\
&= |z|^2 - 2\Re\mathrm{e}(\alpha\overline{z}) + |\alpha|^2 \\
|1-\overline{\alpha}z|^2 &= (1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z}) \\
&= 1 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z\alpha\overline{z} \\
&= 1 - 2\Re\mathrm{e}(\alpha\overline{z}) + |\alpha\overline{z}|^2
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|z-\alpha| < |1-\overline{\alpha}z| &\Leftrightarrow |z-\alpha|^2 < |1-\overline{\alpha}z|^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - 2\Re\mathrm{e}(\alpha\overline{z}) + |\alpha|^2 < 1 - 2\Re\mathrm{e}(\alpha\overline{z}) + |\alpha\overline{z}|^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + |\alpha|^2 < 1 + |\alpha|^2|\overline{z}|^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2(1-|\alpha|^2) < 1 - |\alpha|^2.
\end{aligned}$$

Comme $|\alpha| < 1$ par hypothèse, $1-|\alpha|^2 > 0$ et ceci est équivalent à $|z|^2 < 1$.

5) Comme $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$, on a $|\frac{1}{z}| = |z|$ si et seulement si $|z| = 1$. On cherche donc les nombres complexes de module 1 et qui se trouvent à égale distance de 0 et de 1. Soit $z = a + ib$ la forme algébrique de $z \in \mathbb{C}$. Le nombre z est une solution du problème considéré si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ (1-a)^2+b^2=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2-2a+1+b^2=1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ -2a+1=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1-a^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a deux solutions $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 5.

1) On commence par montrer que les ω^k pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont tous distincts. Si $\omega^k = \omega^{k'}$ avec $k \geqslant k'$, alors $\omega^k\omega^{-k'} = \omega^{k-k'} = 1$. Par hypothèse, on a soit $k-k'=0$, soit $k-k' \geqslant \ell$. Si $0 \leqslant k, k' \leqslant n-1$, la seule possibilité est donc $k = k'$.

La famille des ω^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ est donc de cardinal n. De plus, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1^k = 1$. On a donc n racines distinctes du polynôme $X^n - 1$. Par ailleurs, le polynôme $X^n - 1$ est de degré n, il a donc au plus n racines distinctes. Les racines de $X^n - 1$, autrement dit les racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, sont ainsi exactement les $\{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

2) Comme les ω^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts, les $\sqrt[n]{|\alpha|}\exp(\frac{i}{n}\arg(\alpha))\omega^k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\left(\sqrt[n]{|\alpha|}\exp\left(\frac{i}{n}\arg(\alpha)\right)\omega^k\right)^n = |\alpha|\exp\left(i\arg(\alpha)\right)(\omega^k)^n = \alpha(\omega^n)^k = \alpha.$$

Les $\sqrt[n]{|\alpha|}\exp(\frac{i}{n}\arg(\alpha))\omega^k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ forment donc un ensemble de n racines distinctes du polynôme $X^n - \alpha$. Comme ce polynôme est de degré n, on a bien la totalité des racines, autrement dit la totalité des solutions de l'équation $z^n = \alpha$.

3) Considérons un polygone P régulier à n cotés du plan complexe. Posons $b \in \mathbb{C}$ la moyenne de ses sommets. En translatant P par $-b$, on obtient un polygone P_1 régulier à n côtés et centré en 0. Fixons a un des sommets de P_1 (on a $a \neq 0$). On remplace P_1 par P_1/a. Comme diviser par a revient géométriquement à faire une homothétie et une rotation, $P_2 := P_1/a$ est encore un polygone régulier à n cotés, centré en 0, et dont 1 est un sommet. Par construction, P_2 est globalement invariant par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Cette rotation correspond algébriquement à la multiplication par $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Les puissances de ω sont donc toutes des sommets de P_2. Comme P_2 a n sommets distincts, et que ω a n puissances distinctes. On trouve que les sommets de $P_2 = \frac{P-b}{a}$ sont exactement les ω^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'où le résultat.

Fonction exponentielle

Exercice 6.
1) Soient $u = x + iy$ et $v = a + ib$ deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned}
e^u e^v &= e^x(\cos(y) + i\sin(y))e^a(\cos(b) + i\sin(b)) \\
&= e^x e^a(\cos(y)\cos(b) - \sin(y)\sin(b) + i(\sin(y)\cos(b) + \cos(y)\sin(b)) \\
&= e^{x+a}(\cos(y+b) + i\sin(y+b)) \\
&= e^{(x+a)+i(y+b)} \\
&= e^{x+iy+a+ib} = e^{u+v}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) Soit $z = x + iz \in \mathbb{C}$. On a

$$|e^z| = |e^x(\cos(\theta) + i\sin(\theta))| = e^x|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = e^x(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = e^x.$$

En particulier, si $e^z = 1$, alors $e^x = 1$ et $x = 0$ car x est réel. Ensuite, on a

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(y) = 1, \\ \sin(y) = 0. \end{cases}$$

Cercle trigonométrique à l'appui, ceci est équivalent à $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Au total, on a

$$e^{x+iy} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x + iy \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

3) Soient $z, z' \in \mathcal{C}$. Par la question 1), on a $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Ainsi, e^{-z} est l'inverse de e^z. On a alors

$$\begin{aligned}
e^z = e^{z'} &\Leftrightarrow e^z e^{-z'} = 1 \\
&\Leftrightarrow e^{z-z'} = 1 \\
&\Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente.

4) Soient $z, z' \in \mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$, on a $\Im\mathrm{m}(z - z') = \Im\mathrm{m}(z) - \Im\mathrm{m}(z') < i\pi - (-i\pi) = 2i\pi$, en particulier $z - z' \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. La fonction $z \mapsto e^z$ est donc injective sur $\mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$ par la question précédente.
Il reste à prouver que, pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il existe $z \in R + i] - \pi, \pi[$ tel que $e^z = Z$. On pose $Z = re^{i\theta}$, l'assertion $Z \notin \mathbb{R}_-$ assure que $r > 0$ et que l'on peut choisir $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$. Le nombre $z = \ln(r) + i\theta \in \mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$ est un antécédent de Z, d'où le résultat.

Exercice 7.

1) Par continuité de l'application $z \mapsto z^2$ (et comme $|(1+z/n)^n|$ et $|\exp(z)|$ sont positifs), il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} |(1+z/n)^n|^2 = |\exp(z)|^2$. On a

$$\begin{aligned}
\left|1+\frac{z}{n}\right|^2 &= \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right) \\
&= 1+\frac{z}{n}+\frac{\overline{z}}{n}+\frac{|z|^2}{n^2} \\
&= 1+2\frac{\Re\mathrm{e}(z)}{n}+\frac{|z|^2}{n^2}
\end{aligned}$$

On calcule alors, avec un développement limité de $\ln(1+z) = z + o(z)$

$$\begin{aligned}
\left|1+\frac{z}{n}\right|^{2n} &= \left(1+2\frac{\Re\mathrm{e}(z)}{n}+\frac{|z|^2}{n^2}\right)^n \\
&= \exp\left(n\ln\left(1+2\frac{\Re\mathrm{e}(z)}{n}+\frac{|z|^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(2\frac{\Re\mathrm{e}(z)}{n}+\frac{|z|^2}{n^2}+o\left(2\frac{\Re\mathrm{e}(z)}{n}+\frac{|z|^2}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(2\Re\mathrm{e}(z)+\frac{|z|^2}{n}+o\left(2\Re\mathrm{e}(z)+\frac{|z|^2}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^{2n} = \exp\left(2\Re\mathrm{e}(z)\right) = |\exp(z)|^2.$$

2) Le premier résultat est une simple conséquence de la forme polaire : on a $z = |z|e^{i\arg(z)}$ et $z^n = |z|^n e^{in\arg(z)}$ la forme polaire de z^n. Ensuite, pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = a+ib$ la forme algébrique de z. On a $|z|\cos(\arg(z)) = a$ et $|z|\sin(\arg(z)) = b$. Si $a \neq 0$, on a

$$\frac{\Im\mathrm{m}(z)}{\Re\mathrm{e}(z)} = \frac{b}{a} = \frac{|z|\sin(\arg(z))}{|z|\cos(\arg(z))} = \tan(\arg(z))$$

Si $a > 0$, autrement dit si $\arg(z) \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors on a

$$\arctan\left(\frac{\Im\mathrm{m}(z)}{\Re\mathrm{e}(z)}\right) = \arctan(\tan(\arg(z))) = \arg(z).$$

3) Soit $z = a+ib$ la forme algébrique de z. Pour n assez grand, la partie réelle de $1+z/n$, c'est à dire $1+a/n$, est strictement positive, et on peut appliquer les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) &= \arctan\left(\frac{b/n}{1+a/n}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) \\
&= \frac{b}{n+a}+o\left(\frac{b}{n+a}\right)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\arg\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{nb}{n+a}+o\left(\frac{bn}{n+a}\right)$$

qui converge vers b, c'est à dire vers $\arg(\exp(z))$.

4) On vient de montrer que le module et l'argument de la suite considérée convergent tous deux vers le module et l'argument de la limite souhaitée. Comme la limite souhaitée est différente de 0, elle est entièrement caractérisée par son module et son argument, d'où le résultat.

Sinus et cosinus

Exercice 8.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition de l'exponentielle dans l'exercice 6, on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} &= \frac{(\cos(x)+i\sin(x))+(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2} \\
&= \frac{\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)-i\sin(x)}{2} \\
&= \frac{2\cos(x)}{2} = \cos(x) \\
\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} &= \frac{(\cos(x)+i\sin(x))-(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2i} \\
&= \frac{\cos(x)+i\sin(x)-\cos(x)+i\sin(x)}{2i} \\
&= \frac{2i\sin(x)}{2i} = \sin(x)
\end{aligned}$$

Donc les définitions proposées permettent bien d'étendre les fonctions cosinus et sinus réelles.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\cos^2(z)+\sin^2(z) &= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{2^2} + \frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{(2i)^2} \\
&= \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{-4} \\
&= \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} + \frac{-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{C}$. Par définition, on a

$$\cos(t)+i\sin(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + i\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{e^{it}+e^{-it}+e^{it}-e^{-it}}{2} = e^{it}$$

On avait besoin de faire ce calcul car $t \in \mathbb{C}$. On ne connaissait le résultat que pour $t \in \mathbb{R}$. En utilisant la question 1) de l'exercice 6, on obtient

$$(\cos(t)+i\sin(t))^n = \exp(it)^n = \exp(nit) = \cos(nt)+i\sin(nt)$$

soit la formule de Moivre.

4) Première méthode (qui ne marche pas)

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} \\
&= (\cos(a)+i\sin(a))(\cos(b)+i\sin(b)) \\
&= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b))
\end{aligned}$$

Malheureusement, on ne peut pas identifier parties réelles et imaginaires : comme a et b sont complexes, on ne sait pas si $\cos(a+b)$ ou $\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b), \ldots$ sont des réels.

Vraie méthode : faire le calcul finement :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{2^2} - \frac{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})}{(2i)^2} \\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(b-a)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4} - \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(b-a)}-e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{-4} \\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(b-a)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a+b)}-e^{i(b-a)}-e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4} \\
&= \frac{2e^{i(a+b)}+2e^{-i(a+b)}}{4} = \cos(a+b) \\
\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{(e^{ia}+e^{-ia})(e^{ib}-e^{-ib})}{2^2 i} + \frac{(e^{ia}-e^{-ia})(e^{ib}+e^{-ib})}{2^2 i} \\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(b-a)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(b-a)}+e^{i(a-b)}-e^{-i(a+b)}}{4i} \\
&= \frac{2e^{i(a+b)}-2e^{-i(a+b)}}{4} = \sin(a+b)
\end{aligned}$$

Exercice 9.

1) On utilise la question 3) de l'exercice 6. On a

$$\begin{aligned}
\cos(az) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iaz}+e^{-iaz}}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{iaz} = -e^{-iaz} = e^{-iaz+i\pi} \\
&\Leftrightarrow iaz = -iaz + i\pi + 2ik\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow 2az = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2a} + \frac{k\pi}{a} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2) On applique un raisonnement similaire :

$$\begin{aligned}
\sin(az) = 0 &\Leftrightarrow e^{iaz} = e^{-iaz} \\
&\Leftrightarrow iaz = -iaz + 2i\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow 2iaz = 2i\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{\pi k}{a} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

3) Soit $z = a + ib$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(z) = i &\Leftrightarrow e^{i(a+ib)} + e^{-i(a+ib)} = 2i \\
&\Leftrightarrow e^{ia-b} + e^{-ia+b} = 2i \\
&\Leftrightarrow e^{-b}(\cos(a) + i\sin(a)) + e^{b}(\cos(-a) + i\sin(-a)) = 2i \\
&\Leftrightarrow e^{-b}(\cos(a) + i\sin(a)) + e^{b}(\cos(a) - i\sin(a)) = 2i \\
&\Leftrightarrow (e^{-b}+e^{b})\cos(a) + i(e^{-b}-e^{b})\sin(a) = 2i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (e^{-b}+e^{b})\cos(a) = 0 \\ (e^{-b}-e^{b})\sin(a) = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme b est réel, $e^{-b}+e^{b} > 0$, donc la première équation est équivalente à $\cos(a) = 0$. On a donc $\sin(a) = \pm 1$ selon si $a \equiv \pi/2[2\pi]$ ou $a \equiv -\pi/2[2\pi]$.

Si $a \equiv \pi/2[2\pi]$, la deuxième équation devient $e^{-b} - e^{b} = 2$. On pose $X = e^b$, et l'équation devient $X^{-1} - X = 2$, autrement dit $X^2 + 2X - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$. Comme $X = e^b > 0$, on obtient $e^b = -1+\sqrt{2}$ et $b = \ln(-1+\sqrt{2})$. On a donc des solutions de la forme

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(-1+\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $a \equiv -\pi/2[2\pi]$, la deuxième équation devient $-e^{-b}+e^{b} = 2$. On pose $X = e^b$, et l'équation devient $-X^{-1}+X = 2$, autrement dit $X^2 - 2X - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Comme $X = e^b > 0$, on obtient $e^b = 1+\sqrt{2}$ et $b = \ln(1+\sqrt{2})$. On a donc des solutions de la forme

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(1+\sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 10.

1) On a $u^5 = 1$ par construction, et $u \neq 1$. La somme considérée est une somme de suite géométrique (de raison u). On a alors

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = \frac{u^5 - 1}{u - 1} = \frac{0}{u-1} = 0$$

2) D'après la question précédente, on a $a + b + 1 = u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$ donc $a + b = -1$. Ensuite, on a

$$ab = (u^4 + u)(u^3 + u^2) = u^7 + u^4 + u^6 + u^3 = u^2 + u^4 + u + u^3 = -1.$$

On sait par ailleurs que a et b sont les solutions de l'équation complexe $(X-a)(X-b) = 0$. D'après nos calculs, on a $(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab = X^2 + X - 1$. On peut résoudre cette équation directement, on a $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc les solutions sont

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

On a $a = z_1$ ou $a = z_2$ (l'autre valeur sera égale à b).

3) Comme $u^5 = 1$, on a $u^4 = u^{-1}$. Comme u est de module 1, $u^{-1} = \overline{u}$. On a donc $a = u + \overline{u} = 2\Re\mathrm{e}(u) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$. De même, on a $b = 2\cos(\frac{6\pi}{5}) = -2\cos(\frac{\pi}{5})$.

Comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, on a $b = -2\cos(\frac{\pi}{5}) < 0$. De même, on a $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, donc $a = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Comme $z_1 < 0$ et $z_2 > 0$, on a $b = z_1$ et $a = z_2$. En particulier, $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{z_2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4) Pour $z \in \mathbb{C}$, on sait que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, donc

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} \\
&= \frac{16}{16} - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{5 + \sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on sait que $\sin(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Il s'agit donc de la racine positive de $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$, c'est à dire $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

5) On sait que $b = z_1 = -2\cos(\frac{\pi}{5})$, donc $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. En appliquant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Toujours comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ est donc égal à $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Ensuite, on a $3\pi/5 = \pi - \frac{2\pi}{5}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 11.

1) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, le résultat est immédiat, ensuite, on a

$$1 + z + \cdots + z^n = \sum_{i=0}^{n} z^i$$

et

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{i=0}^{n} z^i &= \sum_{i=0}^{n} z^i - \sum_{i=0}^{n} z^{i+1}\\ &= \sum_{i=0}^{n} z^i - \sum_{i=1}^{n+1} z^i\\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} z^i - \sum_{i=1}^{n} z^i - z^{n+1}\\ &= 1 - z^{n+1}\end{aligned}$$

d'où le résultat : $\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.

2) On applique la question précédente à $z = e^{i\theta}$ (qui est égal à 1 si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), on obtient

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

En passant à la partie réelle, on trouve

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right).$$

Il reste à calculer le second terme. De façon générale on a

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} - \frac{1}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})}\\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} - \frac{1}{e^{i\theta/2}2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})}\\ &= \frac{e^{i(n+1/2)\theta}}{2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} - \frac{e^{-i\theta/2}}{2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})}\\ &= \frac{\cos((n+1/2)\theta) + i\sin((n+1/2)\theta)}{2i\sin(\theta/2)} - \frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

La partie réelle de cette expression est donnée par $\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)} + \frac{1}{2}$, comme désiré.

Dérivabilité des fonctions complexes

Exercice 12.

1) On sait que la fonction $\exp : z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $\exp(z) = \exp(z)$. Par ailleurs, les fonctions $f_1 : z \mapsto iz$ et $f_2 : z \mapsto -iz$ sont holomorphes avec $f_1'(z) = i$, $f_2(z) = -i$ (ce sont des applications affines).
Par composition, les fonction $\exp \circ f_1 : z \mapsto e^{iz}$ et $\exp \circ f_2$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (\exp \circ f_1)'(z) = f_1'(z)\exp(f_1(z)) = ie^{iz} \text{ et } (\exp \circ f_2)'(z) = f_2'(z)\exp(f_2(z)) = -ie^{-iz}$$

(comme on s'y attend). Comme les fonctions holomorphes sont stables par combinaison linéaire, on a

$$\cos = \frac{\exp \circ f_1 + \exp \circ f_2}{2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ et } \sin = \frac{\exp \circ f_1 - \exp \circ f_2}{2i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Avec de plus

$$\begin{aligned}
\cos'(z) &= \frac{(\exp \circ f_1)'(z) + (\exp \circ f_2)'(z)}{2} \\
&= \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} \\
&= i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\
&= -\frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin(z) \\
\sin'(z) &= \frac{(\exp \circ f_1)'(z) - (\exp \circ f_2)'(z)}{2i} \\
&= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)
\end{aligned}$$

On retrouve là les dérivées usuelles de cosinus et sinus.

2) Par définition, tan est définie si et seulement si $\cos(z) \neq 0$. On a déjà résolu cette équation dans l'exercice 9 1) (pour $\alpha = 1$). On a

$$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi - \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Le domaine de définition de tan est donc $\mathbb{C} \setminus \{k\pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sur son domaine de définition, tan est holomorphe comme quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\tan'(z) &= \frac{\sin'(z)\cos(z) - \sin(z)\cos'(z)}{\cos^2(z)} \\
&= \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(z)}.
\end{aligned}$$

En effet, $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ par l'exercice 8. 3) On reprend la question $f_1 : z \mapsto iz$ de la question 1). Par définition, on a $\mathrm{ch} = i(\cos \circ f_1)$ et $\mathrm{sh} = -i(\sin \circ f_1)$. Par dérivation des composées, les fonctions ch et sh sont donc holomorphes, avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}'(z) &= f_1'(z)\cos'(f_1(z)) = -i\sin(iz) = \mathrm{sh}(z), \\
\mathrm{sh}'(z) &= -if_1'(z)\sin'(f_1(z)) = -i.i\cos(iz) = \mathrm{ch}(z).
\end{aligned}$$

Ensuite, la fonction th est définie là ou $\mathrm{ch}(z) \neq 0$, on résout donc cette équation. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(z) = 0 &\Leftrightarrow \cos(iz) = 0 \\ &\Leftrightarrow iz = k\pi - \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = -ik\pi + \frac{i\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

En dehors de ces valeurs, la fonction th est définie et $\mathbb{C}$-dérivable, avec

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(z) &= \frac{\mathrm{sh}'(z)\,\mathrm{ch}(z) - \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{ch}'(z)}{\mathrm{ch}^2(z)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z)}{\mathrm{ch}^2(z)} \\ &= \frac{\cos^2(iz) - i^2\sin^2(iz)}{\mathrm{ch}^2(z)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(z)}.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser le fait que $\mathrm{th}(z) = -i\tan(iz)$.

Exercice 13.

1) Par hypothèse, $f \in \mathcal{H}(U)$. Pour $z \in U$ et h tendant vers 0, on peut donc écrire un développement limité

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h),$$

avec $o(h) = \varepsilon(h)h$ et $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. En conjuguant cette égalité, on obtient

$$\overline{f}(z+h) = \overline{f}(z) + \overline{f'(z)}\,\overline{h} + \overline{h}\,\overline{\varepsilon(h)}.$$

Comme $|\overline{x}| = |x|$ quel que soit $x \in \mathbb{C}$, on a $\overline{h}\,\overline{\varepsilon(h)} = o(h)$, d'où

$$\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = \overline{f'(z)}\frac{\overline{h}}{h} + o(1).$$

2) Si $h \in \mathbb{R}^*$, alors $h = \overline{h}$ et $\overline{h}/h = 1$. Si $h \in i\mathbb{R}^*$, alors $\overline{h} = -h$ et $\overline{h}/h = -1$.
Si $\overline{f}$ est dérivable en z, alors on doit avoir en particulier

$$\begin{aligned}\overline{f}'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbb{R}}}\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\overline{f'(z)} + o(1) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbb{R}}} -\overline{f'(z)} + o(1) \\ &= \overline{f'(z)} = -\overline{f'(z)}.\end{aligned}$$

Et donc $f'(z) = 0$. Réciproquement, si $f'(z) = 0$, on a

$$\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = o(1).$$

donc $\overline{f}$ est dérivable en z, avec $\overline{f}'(z) = 0$.

3) Par définition, $\overline{f}$ est holomorphe sur U si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. D'après la question précédente, ceci est équivalent à dire que $\overline{f'(z)} = 0 = \overline{f}(z)$ pour tout point z de U. D'après l'exercice 15, ceci est équivalent à dire que f est constante sur les composantes connexes de U.

4) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On pose

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

avec $n \geqslant 1$ par hypothèse (P est non constant). On considère également le polynôme

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i = \overline{P(\overline{X})} \in \mathbb{C}[X].$$

Par définition, on a, pour $z \in \mathbb{C}$, $P(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$. Comme Q est holomorphe (c'est un polynôme), on peut appliquer la question 2) et dire que $\overline{Q}$ est dérivable en z si et seulement si $Q'(z) = 0$. Comme Q' est aussi un polynôme, non nul car Q est non constant, il s'annule en un nombre fini de points (au plus $n-1$ points), d'où le résultat.

Exercice 14.
1) Comme γ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $t \in [0,1]$, on peut calculer un développement limité (pour x assez petit)

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) + \gamma'(t)s + o(s).$$

De même, pour $z \in D$, on peut calculer un développement limité (pour h assez petit)

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h).$$

Par composition, on trouve

$$\begin{aligned} f(\gamma(t+s)) &= f\left(\gamma(t) + \gamma'(t)s + o(s)\right) \\ &= f(\gamma(t)) + f'(\gamma(t))(\gamma'(t)s + o(s)) + o\left(\gamma'(t)s + o(s)\right) \\ &= f(\gamma(t)) + f'(\gamma(t))\gamma'(t)s + f'(\gamma(t))o(s) + o\left(\gamma'(t)s + o(s)\right) \end{aligned}$$

Comme $\gamma'(t)s + o(s) = s(\gamma'(t) + o(1))$ tend vers 0 quand s tend vers 0, on a $o((\gamma'(t)s + o(s)) = o(s)$. Ensuite, on a $f'(\gamma(t))o(s) = o(s)$ car $f'(\gamma(t))$ est une constante. D'où

$$f(\gamma(t+s)) = f(\gamma(t)) + f'(\gamma(t))\gamma'(t)s + o(s) + o(s) = f(\gamma(t)) + f'(\gamma(t))\gamma'(t)s + o(s).$$

Donc $f \circ \gamma$ est dérivable en t, avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

2) Soit $t \in [0,1]$. Par la question précédente on a $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$. On pose $f_1 = \Re\mathrm{e}(f)$ et $f_2 = \Im\mathrm{m}(f)$, de sorte que $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$ avec $f_1(z), f_2(z) \in \mathbb{R}$. Comme les fonctions $\Re\mathrm{e}$ et $\Im\mathrm{m}$ sont linéaires, on a

$$\begin{aligned} f_1(\gamma(t+h)) &= \Re\mathrm{e}(f(\gamma(t+h))) \\ &= \Re\mathrm{e}(f(\gamma(t)) + o(h)) \\ &= \Re\mathrm{e}(f(\gamma(t))) + o(h) = f_1(\gamma(t)) + o(h). \end{aligned}$$

Donc $(f_1 \circ \gamma)'(t) = 0$, et de même $(f_2 \circ \gamma)'(t) = 0$. Les fonctions $f_1 \circ \gamma$ et $f_2 \circ \gamma$ sont donc des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est identiquement nulle. Par le théorème des accroissements finis, elles sont constantes. La fonction $f \circ \gamma = (f_1 \circ \gamma) + i(f_2 \circ \gamma)$ est alors constante, d'ou $f(\gamma(1)) = f(\gamma(0))$.

3) Comme D est un disque, il s'agit en particulier d'un ensemble convexe. Ainsi, si $z, z' \in \mathbb{D}$, le chemin $\gamma : t \mapsto tz + (1-t)z'$ est un chemin de z vers z' dans D.

4) On fixe un point $z_0 \in D$. Pour tout point $z \in D$, on considère un chemin γ de z_0 vers z dans D. D'après la question 2), on a $f(z) = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) = f(z_0)$. La fonction f est alors constante et égale à $f(z_0)$ sur D.

Exercice 15.
1) Pour montrer que X est fermé dans U, on considère une suite de X qui converge dans U, et on montre que sa limite est dans X. Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui admet une limite x dans U. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in X$, donc $f(x_n) = f(z_0)$ par définition de X. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $f(z_0)$. Comme la fonction f est continue (car holomorphe, donc $\mathbb{R}$-différentiable), on a

$$f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(x).$$

Ainsi, $f(x) = f(z_0)$ et $x \in X$, qui est donc fermé.
Autre méthode plus rapide : par définition, on a $X = f^{-1}(\{f(z_0)\})$ est l'image réciproque du fermé $\{f(z_0)\}$ par l'application continue f, il s'agit donc d'un fermé.

2) Soit $z \in X$. Comme $z \in U$ qui est un ouvert, il existe un disque ouvert $D \subset U$ centré en z. Par l'exercice précédent, on sait que

$$\forall x \in F, f(x) = f(z) = f(z_0).$$

Ainsi, $U \subset X$ par définition. Comme X contient un voisinage de chacun de ses points, il s'agit d'un ouvert.

3) Comme U est connexe, les seuls sous-ensembles de U qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et U. Comme X est non vide ($z_0 \in X$ par définition), et est un ouvert fermé de U par les questions précédentes, on a $X = U$. Autrement dit, pour tout $z \in U$, on a $z \in X$ donc $f(z) = f(z_0)$. La fonction f est donc constante sur U, égale à $f(z_0)$.

4) Si U est non connexe, on a juste que f est constante sur les composantes connexes de U (localement constante). Par exemple, pour $U = \mathbb{D}(-10, 1) \sqcup \mathbb{D}(10, 1)$, on peut prendre

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \mathbb{D}(-10, 1), \\ -1 & \text{si } z \in \mathbb{D}(10, 1). \end{cases}$$

On vérifie directement que f est holomorphe, sans être constante.

Exercice 16.
1) Soit $z \in U$. Pour tout $h \neq 0$, on a $f(z+h) - f(z) \in \mathbb{R}$ comme différence de deux nombres réels. Ainsi, si $h \in \mathbb{R}^*$ (resp. $h \in i\mathbb{R}^*$), le taux d'accroissement

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

est réel (resp. dans $i\mathbb{R}^*$). Comme on suppose que f est holomorphe sur U, on sait que le taux d'accroissement ci dessus converge vers $f'(z)$ quand h tends vers 0. Considérons la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $h_n = 1/n$. Il s'agit d'une suite qui tend vers 0, donc la suite des taux d'accroissements

$$\frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n}$$

converge vers $f'(z)$. Par ailleurs, cette suite est à valeurs dans le fermé $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$, donc sa limite s'y trouve également : $f'(z) \in \mathbb{R}$. De même, en considérant $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $h_n = i/n$, on obtient que $f'(z)$ est limite d'une suite à valeurs dans $i\mathbb{R}$, qui est également fermé. On a donc $f'(z) \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.
Comme ce raisonnement vaut pour tout $z \in U$, on obtient que f' est identiquement nulle sur U. Comme U est connexe, l'exercice précédent entraîne que f est constante (à valeurs réelle par hypothèse).

2) Si f est à valeurs imaginaires pures, la fonction $g : z \mapsto if(z)$ est à valeurs réelles, et holomorphe comme combinaison linéaire de fonctions holomorphes. On a donc que g est constante par la question précédente, ainsi $f : z \mapsto -ig(z)$ est constante.

Exercice 17. On pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ envoyant z sur z^3 (il s'agit d'une fonction polynômiale, donc d'un polynôme). On veut construire la réciproque g de f. Soit $z \in \mathbb{C}$, $g(z)$ doit être une racine cubique de z, en posant $z = r^{i\theta}$, on cherche à résoudre l'équation

$$g(z)^3 = re^{i\theta} \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\psi} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = r \\ 3\psi \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{r} \\ \psi \equiv \frac{\theta}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

(avec $g(z) := \rho e^{i\psi}$ la forme polaire de $g(z)$). On obtient donc trois valeurs possibles pour $g(z)$,

$$\begin{cases} \sqrt[3]{r}e^{i\psi/3}, \\ \sqrt[3]{r}e^{i(\psi/3+2\pi/3)} = j\sqrt[3]{r}e^{i\psi/3}, \\ \sqrt[3]{r}e^{i(\psi/3+4\pi/3)} = j^2\sqrt[3]{r}e^{i\psi/3}. \end{cases}$$

On veut faire un choix cohérent, qui donne une fonction continue, on choisit donc de poser $g(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\psi/3}$. Il reste à montrer qu'il s'agit bien d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ envoyant 1 sur 1.