TD 5 - Intégration – formule de Cauchy

Topologie du plan

Exercice 1 (Ouverts étoilés). Lesquels des ouverts suivants sont étoilés ? Et, s'ils le sont, par rapport à quels points ?
1) $\mathbb{C}^*$, 2) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, 3) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 1\}$, 4) $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite,
5) $\mathbb{C}$ privé d'une droite, 6) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ ou } -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$.

Exercice 2 (Indice d'un lacet par rapport à un point). Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et $w \in \mathbb{C} - \gamma([a,b])$. On rappelle que *l'indice de γ par rapport à w* est défini par :

$$I(\gamma, w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

1) Pour $t \in [a,b]$, on pose $F(t) = \frac{1}{\gamma(t)-w} \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds\right)$. Calculer la dérivée de F.

2) En déduire que $F(a) = F(b)$, puis que $\exp\left(\int_\gamma \frac{dz}{z-w}\right) = 1$.

3) Montrer que $I(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.

4) Le point w étant fixé, montrer que la fonction envoyant $t \in [a,b]$ sur $|\gamma(t) - w|$ est minorée par une constante $d > 0$.

5) Si u vérifie $|u - w| \leqslant d/2$, trouver une majoration de $|I(\gamma,u) - I(\gamma,w)|$ qui permette de conclure que $u \mapsto I(\gamma, u)$ est continue en w.

6) En déduire que $u \mapsto I(\gamma, u)$ est constante sur les composantes connexes de l'ouvert $U = \mathbb{C} - \gamma([a,b])$.

7) Enfin, montrer que $|I(\gamma, w)|$ tend vers 0 si $|w|$ devient grand. En déduire que $I(\gamma, u) = 0$ si u est dans la composante connexe non bornée de U.

Exercice 3 (Un peu d'homotopie). Soit $w \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne passant pas par w. Soient $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b$. Notons $z_i = \gamma(t_i)$, pour $i = 1, 2$. Supposons qu'il existe U un ouvert étoilé (par exemple un convexe) contenant $\gamma([t_1, t_2])$ mais pas w.

1) Soient α et β deux chemins de z_1 à z_2 à valeurs dans U. Pourquoi a-t-on $\int_\alpha \frac{dz}{z-w} = \int_\beta \frac{dz}{z-w}$?

2) Soit α un tel chemin, et posons $\tilde{\gamma} := \gamma|_{[a,t_1]} + \alpha + \gamma|_{[t_2,b]}$. Faire un dessin, puis déduire de la question précédente que $I(\gamma, w) = I(\tilde{\gamma}, w)$.

3) Considérons $\eta : [0,1] \to \mathbb{C}$ donné par $\eta(t) = \begin{cases} 4t - 1 & \text{si } t \leqslant 1/2 \\ e^{i\pi(2t-1)} & \text{si } t \geqslant 1/2 \end{cases}$. Vérifier que η est un chemin fermé, et le dessiner.

4) En partant du fait que si $C = C(0,1)$ est le cercle unité parcouru dans le sens direct, alors $I(C, i/2) = 1$, utiliser la construction précédente pour prouver rigoureusement que $I(\eta, i/2) = 1$.

5) Appliquer deux fois la construction précédente (en partant d'un cercle autour de 0) pour calculer l'indice du chemin γ défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ (avec $a, b > 0$) par rapport à 0.

Exercice 4 (Un peu plus d'homotopie). Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On reprend les notations de l'exercice précédent, en supposant que γ (qui n'est plus nécessairement un lacet) est à valeurs dans Ω, et que U est inclus dans Ω. Montrer qu'alors $\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$.

Formule de Cauchy

Exercice 5 (Un calcul d'intégrale). On considère le chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1 est le segment $[-R, R]$ (où $R > 1$) et γ_2 est le demi-cercle de diamètre ce segment, dans le demi-plan supérieur, parcouru dans le sens direct.

1) Dessiner γ, et en donner une paramétrisation.

2) Calculer $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$ en décomposant $\frac{1}{1+z^2}$ en éléments simples.

3) Montrer que $\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$ tend vers 0 si R tend vers $+\infty$

4) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$.

Exercice 6 (Intégrale le long d'une ellipse). On considère le chemin γ défini par $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ (avec $a, b > 0$), pour $t \in [0, 2\pi]$.

1) Dessiner γ. Quel est son indice par rapport à 0 ? (voir l'exercice 2).

2) Utiliser la formule de Cauchy pour calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

3) En explicitant (la partie imaginaire de) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, en déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 7 (Construction d'une fonction holomorphe). Fixons $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, et considérons le cercle $C(a, R)$, orienté dans le sens direct. Soit $g : C(a, R) \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $w \in D(a, R)$, posons :

$$f(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,R)} \frac{g(z)}{z - w} dz.$$

1) Adapter la preuve de l'analyticité des fonctions holomorphes pour montrer que f est la somme d'une série entière sur le disque (ouvert) $D(a, R)$.

2) Toujours en utilisant cette preuve, expliciter le développement en série entière de f en un point w de $D(a, R)$, et en déduire une formule intégrale pour les dérivées $f^{(n)}(w)$.

Propriétés des fonctions holomorphes

Exercice 8 (Limite uniforme). À l'aide du théorème de Morera, montrer que si une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur un ouvert converge uniformément vers une fonction f, alors f est holomorphe.

Exercice 9 (Périodicité). Soit f une fonction entière vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z + i) = f(z + 1) = f(z)$. Montrer que f est constante.

Exercice 10 (Croissance polynomiale). Soit f une fonction entière. Supposons qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout $R > 0$, on ait :

$$\sup_{z \in C(0,R)} |f(z)| \leqslant CR^d.$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus d. On adaptera la preuve du théorème de Liouville, dont on remarquera que c'est le cas où $d = 0$.

Exercice 11 (Densité de l'image). Soit f une fonction entière non constante. Le but de l'exercice est de montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$. *Ceci est une version faible du petit théorème de Picard, qui dit que $f(\mathbb{C})$ est en fait égal à $\mathbb{C}$ privé d'au plus deux points.*

1) Supposons qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à l'adhérence de $f(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$?

2) Sous les hypothèses de la question 1, utiliser le théorème de Liouville pour aboutir à une contradiction.

3) Montrer que $f(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathbb{C}$.