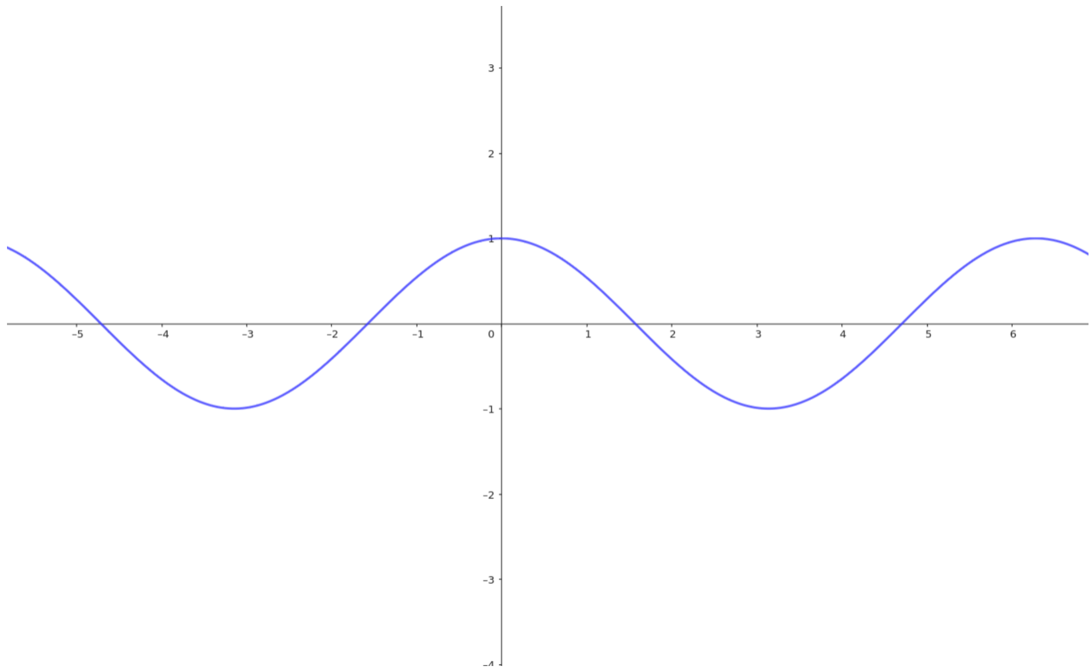
Exemple principe du maximum

Soit f une fonction holomorphe sur un domaine U (=ouvert connexe). Le principe du maximum prédit que, pour tout disque $\overline{\mathbb{D}(a,r)} \subset U$, la fonction $|f|$, restreinte à $\overline{\mathbb{D}(a,r)}$, atteint son maximum au bord, c'est à dire le cercle de centre a et de rayon r. En particulier, une fonction holomorphe n'a pas de maximum local dans l'ouvert.

Cependant, quand on trace le graphe d'une fonction réelle, on voit bien qu'elle peut souvent avoir des maxima locaux. On détaille ici un exemple montrant comment ces deux informations peuvent être vrais en même temps.

Considérons cette bonne vieille fonction cosinus. C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on connait très bien sa restriction à la droite réelle :

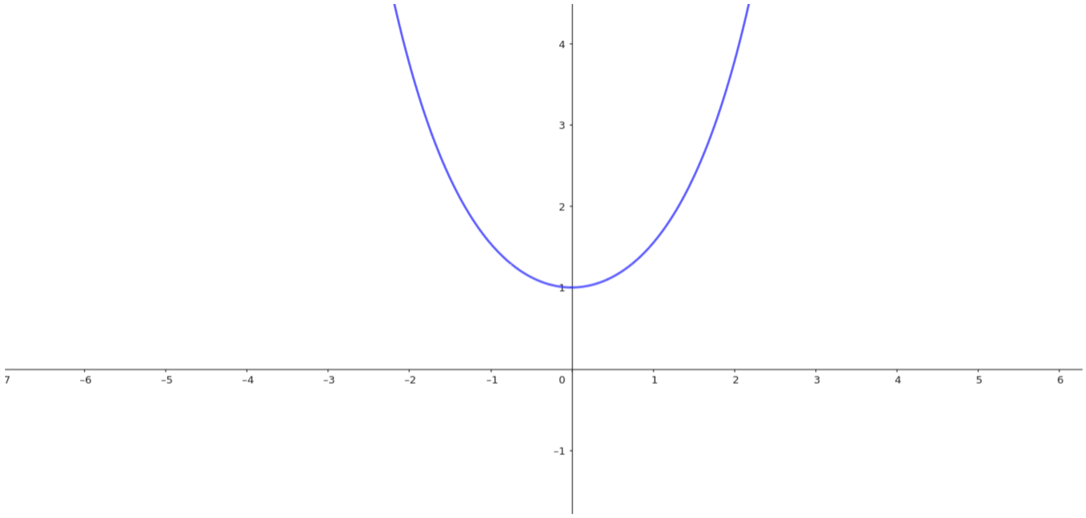


Fixons nous sur $[-\pi, \pi]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus admet évidemment un maximum local (même global en fait) en 0. Pourquoi cela ne contredit pas le principe du maximum ? Et bien tout simplement parce qu'il n'y a pas que l'intervalle réel !

Sur la droite $i\mathbb{R}$, on a

$$\cos(z) = \cos(it) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \mathrm{ch}(t)$$

Et on connait le graphe de ch sur $[-\pi, \pi]$.

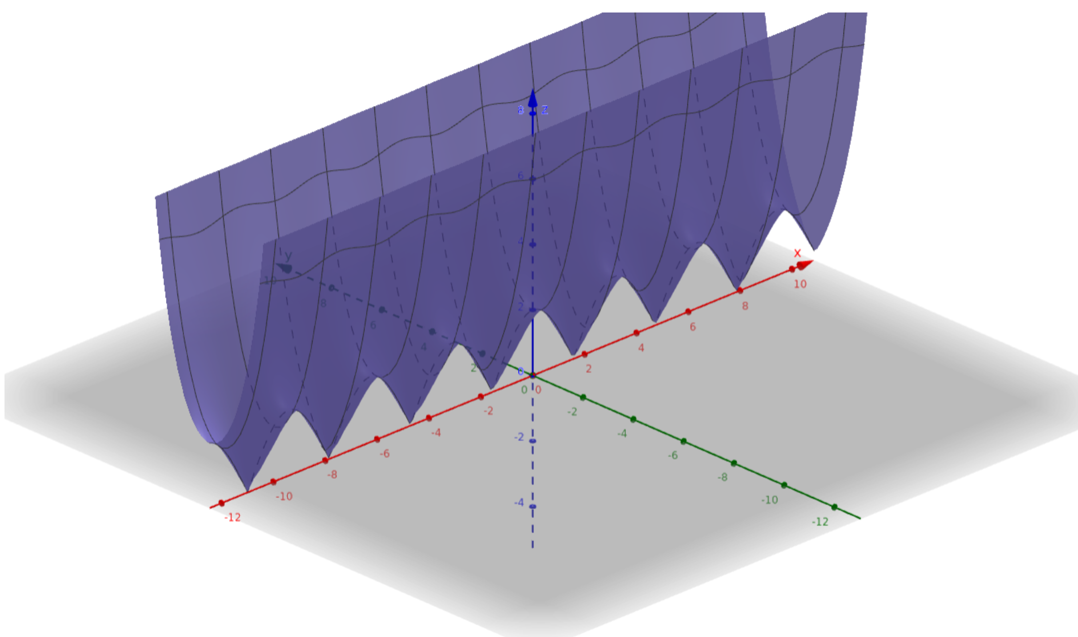


Là, c'est déjà nettement plus naturel de croire que le maximum n'est atteint que sur le bord. Certes ce n'est pas une preuve, mais le maximum de ch sur $[-\pi, \pi]$, donc le maximum de cos sur $[-i\pi; i\pi]$, est nettement plus grand que son maximum sur $[-\pi, \pi]$.

En fait, on peut calculer explicitement le module de la fonction cosinus.

$$\begin{aligned} |\cos(a+ib)|^2 &= \frac{1}{4}(e^{ia}e^{-b} + e^{-ia}e^{b})(e^{-ia}e^{-b} + e^{ia}e^{b}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{-2b} + e^{-2ia} + e^{2ia} + e^{2b}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2b) + \cos(2a)) \end{aligned}$$

Cette dernière fonction respecte plus nettement le principe du maximum. On peut d'ailleurs la tracer explicitement.



on voit module de cosinus au dessus de la droite rouge, et module de cosinus hyperbolique au dessus de la droite verte !