Correction séance 7 (28 mars)

Exercice 1. 4) Attention ici, la série est lacunaire ! Si on écrit la série considérée comme $\sum_{m\geqslant 0} a_m z^m$, on trouve

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas un carré parfait} \\ \sqrt{m}! = n! & \text{si } m = n^2 \end{cases}$$

On calcule donc

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas un carré parfait} \\ \sqrt[m]{\sqrt{m}!} = \sqrt[n^2]{n!} & \text{si } m = n^2 \end{cases}$$

La limite sup de cette suite est donnée par $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$. On utilise la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \sqrt[n^2]{n!} &= \sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \\ &= \sqrt[2n^2]{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[2n^2]{2\pi n}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{e}} \end{aligned}$$

On sait que $\sqrt[n]{e}$ tends vers 1 (e est une constante), ensuite, on a

$$\sqrt[2n^2]{2\pi n} = \exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n^2}\right) \to \exp(0) = 1$$

par croissances comparées. Enfin, on a

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \to \exp(0) = 1$$

aussi par croissances comparées. Au total, on obtient

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = 1$$

Donc le rayon de convergence de la série considérée est $\frac{1}{1} = 1$.

5) Là encore, la série est lacunaire ! Si on écrit la série considérée comme $\sum_{m\geqslant 0} a_m z^m$, on trouve

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas de la forme } n! \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } m = n! \end{cases}$$

On calcule donc

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas un carré parfait} \\ \sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt[n!]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = n^{\frac{-1}{2n!}} & \text{si } m = n! \end{cases}$$

La limite sup de cette suite est donnée par $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{-1}{2n!}}$. On calcule

$$n^{-\frac{-1}{2n!}} = \exp\left(\frac{-\ln(n)}{2n!}\right) \to \exp(0) = 1$$

Donc le rayon de convergence de la série considérée est $\frac{1}{1} = 1$.

6) Enfin une série non lacunaire ! On applique brutalement la formule de Cauchy-Hadamard :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} &= \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \\ &\sim \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\frac{n}{e}}{n} \\ &= \frac{\sqrt[2n]{2\pi n}}{e}\end{aligned}$$

Le numérateur tends vers 1 (croissance comparée), donc $R = e$.

Exercice 3.

1. Par définition, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\sqrt[n]{n^k} = n^{\frac{k}{n}} = e^{\frac{k}{n}\ln n}.$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = e^{k\cdot 0} = 1.$$

2. On pose $P(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$, on calcule

$$\frac{\sqrt[n]{|P(n)|}}{\sqrt[n]{|n^k|}} = \sqrt[n]{\left|\frac{P(n)}{n^k}\right|}$$

On sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^k} = a_k$ est une constante, donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{P(n)}{n^k}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = 1$$

On a montré que les deux suites $\sqrt[n]{|n^k|}$ et $\sqrt[n]{|P(n)|}$ sont équivalentes, comme la première converge vers 1, il en va de même de la seconde.

3. Soient R_P et R les rayons de convergence respectifs des deux séries considérées. Par la formule de Cauchy-Hadamard, on a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ et } \frac{1}{R_P} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)a_n|}$$

Par la question précédente, les suites $\sqrt[n]{|P(n)a_n|}$ et $\sqrt[n]{|a_n|}$ sont équivalentes. Les limites sup de ces deux suites sont donc égales, et $R = R_p$.

4. On pose $P(z) = 3z^5 + z + 1$. Par la question précédente, la série entière considérée a le même rayon de convergence que la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} P(n)a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} 2^n \ln n z^n$$

Pour calculer le rayon de convergence de cette dernière série, on calcule

$$\sqrt[n]{2^n \ln n} = 2\sqrt[n]{\ln n} = 2\exp\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n}\right)$$

Par croissances comparées, ceci tend vers 2 et donc $R = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.

1) Soit φ une fonction quelconque, par dérivation des produits, la dérivée de $e^z\varphi(z)$ est $e^z(\varphi(z)+\varphi'(z))$. Les dérivées successives de la fonction f considérée sont donc

$$f'(z) = e^z(\sin(z)+\cos(z)),\ \ f''(z) = e^z(\sin(z)+\cos(z)+\cos(z)-\sin(z) = 2\cos(z)e^z,\ \ f'''(z) = 2e^z(\cos(z)-\sin(z))$$

En appliquant ces fonctions en 0, on trouve les trois premiers termes du développement en série entière de f

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + zf'(0) + z^2\frac{f''(0)}{2} + z^3\frac{f'''(0)}{6} + o(z^3) \\ &= z + z^2 + \frac{z^3}{3} + o(z^3). \end{aligned}$$

2) On peut utiliser une formule de trigo : $f(z) = \sin(z)\cos(z) = \frac{1}{2}\sin(2z)$, on calcule alors facilement

$$f'(z) = \cos(2z), \quad f''(z) = -2\sin(2z), \quad f'''(z) = -4\cos(z)$$

En appliquant ces fonctions en 0, on trouve les trois premiers termes du développement en série entière de f

$$f(z) = z - \frac{2}{3}z^3 + o(z)3$$

D'une autre manière, on sait que

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(1-(-1)^n)i^n}{n!}z^n$$

Et donc

$$\frac{1}{2}\sin(2z) = \frac{1}{4i}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(1-(-1)^n)i^n}{n!}2^n z^n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(1-(-1)^n)}{2}\frac{(2i)^{n-1}}{n!}z^n$$

En appliquant la formule du terme général pour $n = 0, 1, 2, 3$, on retrouve le résultat précédent.

3) Ici, il est nettement plus facile de manipuler directement la série entière :

$$\exp(z) - 1 = \sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n!}$$

Et donc

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{m\geqslant 0}\frac{z^m}{(m+1)!}$$

On en déduit les premiers termes du développement

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + o(z^3)$$