Correction séance 6 (22 février)

Exercice 4. 1) La fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est polynomiale, donc $\mathcal{C}^\infty$, et on calcule

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= y^2 - x^2; \quad (\partial_x)^2 u(x,y) = -2x \\ \partial_y u(x,y) &= 2xy; \quad (\partial_y)^2 u(x,y) = 2x \end{aligned}$$

On a donc bien $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$, donc u est harmonique.

2) On fixe $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ et on considère la fonction v donnée par

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)dt$$

Il s'agit d'une fonction harmonique, et $u + iv$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le choix de x_0, y_0 revient à remplacer v par une fonction de la forme $v + c$, où c est une constante (v est définie à une constante près). Ici, on prend $x_0 = y_0 = 0$ et on a

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y t^2 - x^2 dt - \int_0^x 2t \cdot 0 dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - tx^2\right]_0^y \\ &= \frac{y^3}{3} - yx^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait de toute manière que si v_1, v_2 sont deux fonctions telles que $u + iv_1$ et $u + iv_2$ sont holomorphes, alors $i(v_1 - v_2) = (u + iv_1) - (u + iv_2)$ est holomorphe, et à valeurs dans $i\mathbb{R}$. Les seules fonctions holomorphes à valeurs dans $i\mathbb{R}$ sont les constantes, donc $v_1 - v_2$ est une constante. La fonction $f = u + iv$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(z) &= xy^2 - \frac{x^3}{3} + i\left(\frac{y^3}{3} - yx^2\right) \\ &= \frac{1}{3}(-x^3 - 3iyx^2 + 3xy^2 + iy^3) \\ &= \frac{1}{3}(-x - iy)^3 \\ &= \frac{-z^3}{3} \end{aligned}$$

4) On reprend les questions précédentes. La fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est polynomiale, avec

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= 6x^2 - 6y^2 + 2x; \quad (\partial_x)^2 u(x,y) = 12x + 2 \\ \partial_y u(x,y) &= -12xy - 2y - 1; \quad (\partial_y)^2 u(x,y) = -12x - 2 \end{aligned}$$

On a donc bien $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$, donc u est harmonique. On reprend $x_0 = y_0 = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_0^y 6x^2 - 6t^2 + 2x dt - \int_0^x -12t \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) dt \\ &= (6x^2 + 2x)y - 6\int_0^y t^2 dt + \int_0^x dt \\ &= (6x^2 + 2x)y - 6\frac{y^3}{3} + x \end{aligned}$$

On a au final

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i\left((6x^2+2x)y - 2y^3 + x\right) \\ &= 6\left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + ix^2y - i\frac{y^3}{3}\right) + x^2 - y^2 + 2ixy - y + ix \\ &= 6\frac{z^3}{3} + z^2 + iz. \end{aligned}$$

Exercice 5. 1) Comme u est une fonction polynomiale, il est facile de calculer ses dérivées partielles :

$$\begin{array}{ll} \partial_x u(x,y) = 2ax + by; & (\partial_x)^2 u(x,y) = 2a \\ \partial_y u(x,y) = bx + 2cy; & (\partial_y)^2 u(x,y) = 2c \end{array}$$

La fonction u est donc harmonique si et seulement si $a = -c$.

2) Comme précédemment, on fixe $x_0 = y_0 = 0$ et on calcule

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)dt \\ &= \int_0^y \partial_x u(x,t)dt - \int_0^x \partial_y u(t,0)dt \\ &= \int_0^y 2zx + btdt - \int_0^x btdt \\ &= \left[2axt + \frac{bt^2}{2}\right]_0^y - \left[\frac{bt^2}{2}\right]_0^x \\ &= 2axy + \frac{by^2}{2} - \frac{bx^2}{2}. \end{aligned}$$

En général, les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $u + iv$ soit holomorphes sont les fonctions de la forme $v(x,y) = 2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2) + z_0$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$.

3) En prenant $z_0 = 0$ dans le résultat de la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned} f(z) &= ax^2 + bxy - ay^2 + i\left(2axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2)\right) \\ &= a(x^2 - y^2 + 2ixy) + \frac{b}{2}\left(2xy + i(y^2 - x^2)\right) \\ &= az^2 + \frac{b}{2}(-iz^2) \\ &= z^2\left(a^2 - \frac{ib}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 8. 1) On pose $f = u + iv$ comme d'habitude pour le restant de cet exercice. On a

$$\begin{aligned} \partial_x f + i\partial_y f &= \partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv) \\ &= \partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v \\ &= \partial_x u - \partial_y v + i(\partial_x v + \partial_y u) \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\partial_x f + i\partial_y f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

Soit exactement les équations de Cauchy-Riemann. Une fonction f est donc $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z = x + iy$ si et seulement si $(\partial_x f + i\partial_y f)(x, y) = 0$, soit le résultat voulu.

2) On a

$$\begin{aligned}
\partial_z f + \partial_{\overline{z}} f &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f + \partial_x f - i\partial_y f) = \partial_x f \\
\partial_{\overline{z}} f - \partial_z f &= \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f - \partial_x f + i\partial_y f) = i\partial_y f \\
2\overline{\partial_z f} &= \overline{(\partial_x f - i\partial_y f)} \\
&= \overline{(\partial_x(u + iv) - i\partial_y(u + iv))} \\
&= \overline{\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v} \\
&= \overline{\partial_x u + \partial_y v + i(\partial_x v - \partial_y u)} \\
&= \partial_x u + \partial_y v - i(\partial_x v - \partial_y u) \\
&= \partial_x u - i\partial_x v + i\partial_y u + \partial_y v \\
&= \partial_x(u - iv) + i\partial_y(u - iv) \\
&= (\partial_x \overline{f} + i\partial_y \overline{f}) = 2\partial_{\overline{z}} \overline{f}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\partial_{\overline{z}} f = \partial_{\overline{z}} \overline{\overline{f}} = \overline{\partial_z \overline{f}}$ et que $\overline{\partial_{\overline{z}} f} = \partial_z \overline{f}$ en passant au conjugué.

3) Comme f est $\mathbb{R}$-différentiable, on peut définir $\partial_x f$ et $\partial_y f$. D'après la question 1, on a

$$\begin{aligned}
f\ \mathbb{C} - \text{dérivable en } z_0 &\Leftrightarrow (\partial_x f + i\partial_y f)(z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(f))(z_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\partial_{\overline{z}} f)(z_0) = 0.
\end{aligned}$$

Sous cette condition (les équation de Cauchy-Riemann), la jacobienne de f au point z_0 est donnée par

$$\begin{pmatrix} \partial_x u(z_0) & \partial_y u(z_0) \\ \partial_x v(z_0) & \partial_y v(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et $f'(z_0) = a + ib = \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
(\partial_z f)(z_0) &= \frac{1}{2}\left((\partial_x - i\partial_y)(u + iv)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\partial_x u + i\partial_x v - i\partial_y u + \partial_y v)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\partial_x u + i\partial_x v + i\partial_x v + \partial_x u)(z_0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\partial_x u(z_0) + 2i\partial_x v(z_0)\right) \\
&= \partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0) = f'(z_0).
\end{aligned}$$

4) Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. La fonction $\overline{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $(\partial_{\overline{z}} \overline{f})(z_0) = 0$. En passant au conjugué et en utilisant la question 1), on trouve que $\overline{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $\overline{\partial_{\overline{z}} \overline{f}}(z_0) = (\partial_z \overline{\overline{f}})(z_0) = f'(z_0) = 0$.

5) On pose $g(z) = u_1(z) + iv_1(z)$. Par définition, on a $g(x, y) = u(x, -y) + iv(x, -y)$, donc $u_1(x, y) = u(x, -y)$ et $v_1(x, y) = v(x, -y)$, et

$$\begin{aligned}
\partial_x u_1(x, y) = \partial_x u(x, -y); \quad \partial_y u_1(x, y) = -\partial_y u(x, -y) \\
\partial_x v_1(x, y) = \partial_x v(x, -y); \quad \partial_y v_1(x, y) = -\partial_y v(x, -y)
\end{aligned}$$

En appliquant ces formules, on trouve

$$\begin{aligned}2(\partial_{\overline{z}}g)(z_0) &= ((\partial_x + i\partial_y)(g))(z_0)\\ &= \partial_x u_1(x,y) - \partial_y v_1(x,y) + i(\partial_x v_1(x,y) + \partial_y u_1(x,y))\\ &= \partial_x u(x,-y) + \partial_y v(x,-y) + i(\partial_x v(x,-y) - \partial_y u(x,-y))\\ &= ((\partial_x - i\partial_y)(f))(\overline{z_0})\\ &= 2(\partial_z f)(\overline{z_0}).\end{aligned}$$

Ensuite, comme $f(\overline{\overline{z}}) = f(z)$, on obtient également $(\partial_{\overline{z}} f)(z_0) = (\partial_z g)(\overline{z_0})$ pour z_0 dans U. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors

$$(\partial_{\overline{z}}\overline{g})(\overline{z_0}) = \overline{(\partial_z g)(\overline{z_0})} = \overline{(\partial_{\overline{z}} f)(z_0)} = 0$$

Et donc $\overline{g}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $\overline{z_0}$.

6) Sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$, les opérateurs $\partial_x^2, \partial_y^2, \partial_x\partial_y$ et $\partial_y\partial_x$ sont définis. De plus, les opérateurs $\partial_x\partial_y$ et $\partial_y\partial_x$ sont égaux par la règle de Schwarz. On a alors

$$\begin{aligned}4\partial_z\partial_{\overline{z}} &= (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)\\ &= \partial_x^2 - i\partial_y\partial_x + i\partial_x\partial_y + \partial_y^2\\ &= \partial_x^2 + \partial_y^2\\ &= \partial_x^2 + i\partial_y\partial_x - i\partial_x\partial_y + \partial_y^2\\ &= (\partial_x + i\partial_y)(\partial_x - i\partial_y)\\ &= 4\partial_{\overline{z}}\partial_z.\end{aligned}$$

FEUILLE 3

Exercice 1. 1) On fixe $N \geqslant 0$, et on considère la somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{z^{N+1} - 1}{z - 1}$$

On sait que cette dernière suite converge (quand N tend vers $+\infty$) si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de cette série entière est donc 1.

2) On applique le critère de d'Alembert. On calcule

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Le rayon de convergence de la série entière considérée est donc $+\infty$ (c'est la fonction exponentielle, donc c'est assez heureux !)

3) Ça se complique. On applique la formule de Cauchy-Hadamard. On calcule

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{\sin(n)}$$

Comme la suite $\sin(n)$ est dense dans $[-1, 1]$, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers 1. On obtient une sous-suite de $e^{\sin(n)}$ qui converge vers e. Comme $e^{\sin(n)} \leqslant e$, on obtient bien que $\limsup e^{\sin(n)} = e$. Le rayon de convergence de la série considérée est donc $\frac{1}{e}$.