Correction séance 5 (15 février)

Exercice 2. À chaque fois, on pose $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy) = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ les parties réelles et imaginaires de f. La Jacobienne de f au point $z = x+iy = (x,y)$ de $\mathbb{C}$ est donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à demander que cette matrice soit de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

On aalors $f'(x+iy) = a+ib$. Pour trouver l'expression de $f'(x+iy)$ en fonction de $z = x+iy$, on utilise les formules $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. On a alors

$$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) = \partial_x u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + i\partial_x v\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

Bien-sûr, on peut aussi être astucieux et reconnaitre directement l'expression de $f'(z)$ en fonction de z, la méthode ci-dessus est plus longue, mais elle va toujours marcher.

1) Ici, on a $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$ et $v(x,y) = 2(1+x)y$. La jacobienne de f en z est alors donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x+2 & -2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}.$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point : elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec

$$f'(z) = 2x + 2 + i2y = 2(x+iy) + 2 = 2z + 2.$$

En fait, on remarque que $f(z) = z^2 + 2z$. On voit alors immédiatement que f est holomorphe (c'est un polynôme), et que $f'(z) = 2z + 2$.

2) Ici, on a $u(x,y) = y^2 \sin(x)$ et $v(x,y) = y$. La jacobienne de g en z est alors donnée par

$$Jg_z = \begin{pmatrix} y^2\cos(x) & 2y\sin(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc g respecte les équations de Cauchy-Riemann en $z = x+iy$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2y\sin(x) = 0, \\ y^2\cos(x) = 1. \end{cases}$$

La première équation donne $y = 0$ ou $\sin(x) = 0$. Comme la deuxième équation donne $y^2 \neq 0$, on a $y \neq 0$ et $\sin(x) = 0$. On a alors $\cos(x) = \pm 1$, mais comme $y^2 > 0$ et $1 > 0$, $y^2\cos(x) = 1$ force $\cos(x) = 1$, autrement dit $x \equiv 0[2\pi]$. Le système devient alors

$$\begin{cases} x \equiv 0[2\pi] \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2k\pi \pm i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

La fonction g est donc $\mathbb{C}$-dérivable exactement en les points complexes de la forme $2k\pi \pm i$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Sa dérivée est donnée en ces points par $f'(z) = 1$.

3) Ici, on a $u(x, y) = x^3y^2$ et $v(x, y) = x^2y^3$. La jacobienne de g en z est alors donnée par

$$Jg_z = \begin{pmatrix} 2x^2y^2 & 2x^3y \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

Donc h respecte les équations de Cauchy-Riemann en $z = x + iy$ si et seulement si

$$2x^3y = -2xy^3 \Leftrightarrow 2xy(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

La fonction h est donc $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, sur lequel sa dérivée est donnée par $h'(z) = 0$.

4) On reconnait $k(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$. Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, avec $k'(z) = \frac{-1}{z^2}$.

5) On reconnait

$$\begin{aligned} l(x + iy) &= e^x(-\sin(y) + i\cos(y)) + 3 - 5i \\ &= e^x(i(i\sin(y) + \cos(y)) + 3 - 5i \\ &= ie^{x+iy} + 3 - 5i \\ &= ie^z + 3 - 5i \end{aligned}$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $l'(z) = ie^z$.

Exercice 3. Ici, on a $u(x, y) = x^2 + axy + by^2$ et $v(x, y) = cx^2 + dxy + y^2$ les parties réelles et imaginaires de f, respectivement. La jacobienne de f en $z \in \mathbb{C}$ est alors donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x + ay & ax + 2by \\ 2cx + dy & dx + 2y \end{pmatrix}$$

Pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$, il faut et il suffit que f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$. En particulier, en 1 et en i. En spécialisant Jf_z en $z = 1 = (1, 0)$ et en $z = i = (0, 1)$, on trouve

$$Jf_1 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2c & d \end{pmatrix} \text{ et } Jf_i = \begin{pmatrix} a & 2b \\ d & 2 \end{pmatrix}$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en 1 et en i si et seulement si

$$\begin{cases} 2 = d, \\ 2c = -a, \\ a = 2, \\ d = -2b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a = 2, \\ 2c = -2, \\ 2 = -2b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ d = 2, \\ c = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

La seule fonction possible est donc $f(x + iy) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2)$. Il reste à vérifier que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (pour l'instant, on sait juste qu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en 1 et en i). La jacobienne de f en z est donnée par

$$Jf_z = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x - 2y \\ -2x + 2y & 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Donc f respecte les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$, et on a

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) \\ &= (x + iy)^2 - 2ixy + 2xy + i((ix - y)^2 + 2xy + 2ixy) \\ &= (x + iy)^2 + i(ix - y)^2 - 2ixy + 2xy + 2ixy - 2xy \\ &= z^2 + i(iz)^2 = (1 - i)z^2. \end{aligned}$$