Correction séance 3 (1 février)

Exercice 10.
1) On a $u^5 = 1$ par construction, et $u \neq 1$. La somme considérée est une somme de suite géométrique (de raison u). On a alors

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = \frac{u^5 - 1}{u - 1} = \frac{0}{u - 1} = 0$$

2) D'après la question précédente, on a $a + b + 1 = u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 = 0$ donc $a + b = -1$. Ensuite, on a

$$ab = (u^4 + u)(u^3 + u^2) = u^7 + u^4 + u^6 + u^3 = u^2 + u^4 + u + u^3 = -1.$$

On sait par ailleurs que a et b sont les solutions de l'équation complexe $(X - a)(X - b) = 0$. D'après nos calculs, on a $(X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab = X^2 + X - 1$. On peut résoudre cette équation directement, on a $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc les solutions sont

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On a $a = z_1$ ou $a = z_2$ (l'autre valeur sera égale à b).

3) Comme $u^5 = 1$, on a $u^4 = u^{-1}$. Comme u est de module 1, $u^{-1} = \overline{u}$. On a donc $a = u + \overline{u} = 2\Re\mathrm{e}(u) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$. De même, on a $b = 2\cos(\frac{6\pi}{5}) = -2\cos(\frac{\pi}{5})$.
Comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, on a $b = -2\cos(\frac{\pi}{5}) < 0$. De même, on a $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, donc $a = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Comme $z_1 < 0$ et $z_2 > 0$, on a $b = z_1$ et $a = z_2$. En particulier, $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{z_2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4) Pour $z \in \mathbb{C}$, on sait que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, donc

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} \\
&= \frac{16}{16} - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{5 + \sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

Comme $0 < 2\pi/5 < \pi/2$, on sait que $\sin(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Il s'agit donc de la racine positive de $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$, c'est à dire $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

5) On sait que $b = z_1 = -2\cos(\frac{\pi}{5})$, donc $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. En appliquant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}.$$

Toujours comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ est donc égal à $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
Ensuite, on a $3\pi/5 = \pi - \frac{2\pi}{5}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Ainsi,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 11.
1) Soient $z \in \mathbb{C} \setminus 1$, et $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, le résultat est immédiat, ensuite, on a $1 + z + \cdots + z^n = \sum_{i=0}^n z^i$ et

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{i=0}^n z^i &= \sum_{i=0}^n z^i - \sum_{i=0}^n z^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n z^i - \sum_{i=1}^{n+1} z^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n z^i - \sum_{i=1}^n z^i - z^{n+1} \\ &= 1 - z^{n+1}\end{aligned}$$

d'où le résultat : $\sum_{i=0}^n z^i = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.
2) On applique la question précédente à $z = e^{i\theta}$ (qui est égal à 1 si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), on obtient

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

En passant à la partie réelle, on trouve

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right).$$

Il reste à calculer le second terme. De façon générale on a

$$\begin{aligned}\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} - \frac{1}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} - \frac{1}{e^{i\theta/2}2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)\theta}}{2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} - \frac{e^{-i\theta/2}}{2i\Im\mathrm{m}(e^{i\theta/2})} \\ &= \frac{\cos((n+1/2)\theta) + i\sin((n+1/2)\theta)}{2i\sin(\theta/2)} - \frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

La partie réelle de cette expression est donnée par $\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)} + \frac{1}{2}$, comme désiré.

Exercice 13.
1) Par hypothèse, $f \in \mathcal{H}(U)$. Pour $z \in U$ et h tendant vers 0, on peut donc écrire un développement limité

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h),$$

avec $o(h) = \varepsilon(h)h$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. En conjuguant cette égalité, on obtient

$$\overline{f}(z+h) = \overline{f}(z) + \overline{f'(z)}\overline{h} + \overline{h}\overline{\varepsilon(h)}.$$

Comme $|\overline{x}| = |x|$ quel que soit $x \in \mathbb{C}$, on a $\overline{h}\overline{\varepsilon(h)} = o(h)$, d'où

$$\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = \overline{f'(z)}\frac{\overline{h}}{h} + o(1).$$

2) Si $h \in \mathbb{R}^*$, alors $h = \overline{h}$ et $\overline{h}/h = 1$. Si $h \in i\mathbb{R}^*$, alors $\overline{h} = -h$ et $\overline{h}/h = -1$.
Si $\overline{f}$ est dérivable en z, alors on doit avoir en particulier

$$\begin{aligned}\overline{f}'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbb{R}}} \frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \overline{f'(z)} + o(1) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbb{R}}} -\overline{f'(z)} + o(1) \\ &= \overline{f'(z)} = -\overline{f'(z)}.\end{aligned}$$

Et donc $f'(z) = 0$. Réciproquement, si $f'(z) = 0$, on a

$$\frac{\overline{f}(z+h) - \overline{f}(z)}{h} = o(1).$$

donc $\overline{f}$ est dérivable en z, avec $\overline{f}'(z) = 0$.

3) Par définition, $\overline{f}$ est holomorphe sur U si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. D'après la question précédente, ceci est équivalent à dire que $\overline{f'(z)} = 0 = \overline{f}(z)$ pour tout point z de U. D'après l'exercice 15, ceci est équivalent à dire que f est constante **sur chaque composante connexe de U**.