Correction séance 2 (25 janvier)

Exercice 3.
1) On cherche les racines du nombre complexe $1+i$.
Première méthode : On calcule la forme polaire de $1+i$. On a $|1+i|^2 = 1+1 = 2$, donc

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Maintenant que nous avons la forme polaire de $1+i$, il est facile d'en extraire les racines : elles sont données par $z = \pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}$.
Deuxième méthode : Soit $z = a+ib$ une racine de $1+i$, on a $z^2 = 1+i = z^2 = a^2-b^2+2iab$, et $|z|^2 = a^2+b^2 = |1+i| = \sqrt{2}$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a^2-b^2 = 1 \\ a^2+b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1+\sqrt{2} \\ 2b^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

On constate que $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ sont tous deux des réels positifs, il est donc possible d'en prendre des racines réelles. L'équation $2ab = 1 > 0$ force a et b à avoir le même signe. Les deux racines de $1+i$ sont donc données par

$$a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ et } a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

En combinant les deux méthodes, on vient de trouver une méthode pour calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$! Dans les exemples suivant, on aura tendance a utiliser la deuxième méthode, qui est juste calculatoire et évite de devoir calculer des arguments de nombres complexes.

2) On applique la méthode précédente : Si $z = a+ib$ est solution de l'équation, alors

$$\begin{cases} z^2 = a^2-b^2+2iab = -5+12i \\ |z|^2 = a^2+b^2 = |-5+12i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2+b^2 = \sqrt{25+144} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 18 \\ ab = 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 3 \\ ab > 0 \end{cases}$$

On a donc deux solutions $z_1 = 2+3i$ et $z_2 = -2-3i$.

3) Pour éviter des calculs trop compliqués, on divise le polynôme considéré par son coefficient dominant. On a

$$\frac{8+6i}{3+i} = \frac{(8+6i)(3-i)}{3^2+1} = \frac{24+6+18i-8i}{10} = 3+i$$

$$\frac{25+5i}{3+i} = \frac{(25+5i)(3-i)}{3^2+1} = \frac{75+5+i(15-25)}{10} = 8-i$$

L'équation considérée est alors équivalente à $z^2-(3+i)z+(8-i) = 0$. Pour résoudre cette équation, on calcule

$$\Delta = (3+i)^2 - 4(8-i) = 9-1-32+4i = -24+10i = 2(-12+5i).$$

On doit calculer les racines de Δ dans $\mathbb{C}$. On résout

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = 10 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{4(144+25)} = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ ab = 5 \\ 2b^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 5 \\ ab = 5 \end{cases}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\pm(1+5i)$. Les solutions de l'équation de départ sont alors données par

$$z_1 = \frac{3+i+1+5i}{2} = 2+3i \text{ et } z_2 = \frac{3+i-(1+5i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i.$$

4) On pose $P(X) = X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 - 3X + 1$. On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc

$$(1+i)^2 = 2e^{i\pi/2} = 2i,\ (1+i)^3 = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2(1-i),\ (1+i)^4 = (2i)^2 = -4.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} P(1+i) &= -4 - 3.2(1-i) + \frac{9}{2}.2i - 3(1+i) + 1 \\ &= -4 - 6 + 6i + 9i - 3 - 3i + 1 = 0 \end{aligned}$$

On sait alors que le polynôme P est divisible par $(X-(1+i))$. Par ailleurs, P est un polynôme à coefficients réels. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\overline{P(z)} = \overline{z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1} = \overline{z}^4 - 3\overline{z}^3 + \frac{9}{2}\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 1 = P(\overline{z}).$$

Autrement dit, si $(1+i)$ est racine de P, $(1-i) = \overline{(1+i)}$ l'est également. On sait alors que $P(X)$ est divisible par $(X-(1+i))(X-(1-i)) = X^2 - 2X + 2$. En calculant la division euclidienne des polynômes, on trouve

$$P(X) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - X + 1/2).$$

Il reste donc à résoudre l'équation $z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$. Il s'agit d'une équation polynômiale de degré 2, et on calcule

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.\frac{1}{2} = 1 - 2 = -1.$$

Les solutions sont données par $z_1 = \frac{1-i}{2}$ et $z_2 = \frac{1+i}{2}$. Au final, on a

$$P(X) = (X-(1+i))\,(X-(1-i))\left(X - \frac{1-i}{2}\right)\left(X - \frac{1+i}{2}\right).$$

Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont alors

$$1+i,\ 1-i,\ \frac{1-i}{2},\ \frac{1+i}{2}.$$

5) On pose $Q(X) = X^3 - (1+2i)X^2 + 3(1+i)X - 10(1+i) = 0$. On commence par chercher une solution imaginaire pure à l'équation $Q(z) = 0$. On considère $i\alpha \in i\mathbb{R}$, et on calcule

$$\begin{aligned} Q(i\alpha) &= (i\alpha)^3 - (1+2i)(i\alpha)^2 + 3(1+i)i\alpha - 10(1+i) \\ &= -i\alpha^3 + (1+2i)\alpha^2 + 3(1-i)\alpha - 10(1+i) \\ &= -i\alpha^3 + \alpha^2 + 2i\alpha^2 + 3i\alpha - 3\alpha - 10 - 10i \\ &= \alpha^2 - 3\alpha - 10 + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10). \end{aligned}$$

On a alors

$$Q(i\alpha)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2-3\alpha-10=0,\\ -\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha-10=0.\end{cases}$$

On résout d'abord $\alpha^2-3\alpha-10=0$. On calcule $\Delta=9+40=7^2$. Les solutions de $\alpha^2-3\alpha-10=0$ sont donc

$$\alpha_1=\frac{3+7}{2}=5 \text{ et } \alpha_2=\frac{3-7}{2}=-2$$

Parmi ces deux réels, seul -2 est solution de la 2-ème équation, car

$$-(-2)^3+2(-2)^2+3(-2)-10=0 \text{ et } -5^3+2.5^2+3.5-10=-70$$

On a donc que $z=-2i$ est une solution de $Q(z)=0$. Le polynôme $Q(X)$ est alors divisible par $(X+2i)$. En calculant la division euclidienne des polynômes, on trouve

$$Q(X)=(X+2i)(X^2-(1+4i)X+5(-1+i)).$$

Il reste à résoudre l'équation $z^2-(1+4i)z+5(i-1)=0$. On calcule

$$\Delta^2=(1+4i)^2-4.5(i-1)=(1-16+8i)-20i+20=5-12i=-(-5+12i)$$

D'après la question 2), les racines de Δ sont $i(2+3i)=-3+2i$ et $-i(2+3i)=3-2i$. Les solutions de $z^2-(1+4i)z+5(i-1)=0$ sont alors données par

$$\frac{1+4i+(-3+2i)}{2}=-1+3i \text{ et } \frac{1+4i+3-2i}{2}=2+i$$

Au final, on a $Q(X)=(X+2i)(X-(-1+3i))(X-(2+i))$, et les solutions de $Q(z)=0$ sont

$$-2i,\ -1+3i,\ 2+i.$$

6) Pour $n=1$, l'équation devient $z-1=z+1$, i.e. $-1=1$ qui est impossible : l'équation n'a pas de solutions. Pour $n\geqslant 2$, $z=1$ n'est pas une solution car $(z+1)^n=2^n\neq 0^n=(z-1)^n$. On peut donc écrire

$$(z+1)^n=(z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$$

Autrement dit, $\zeta=\frac{z+1}{z-1}$ est une racine n-ème de l'unité, différente de 1 car $z+1\neq z-1$. On a donc $\zeta=\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ avec $k\in[\![1,n-1]\!]$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\zeta=\frac{z+1}{z-1} &\Leftrightarrow \zeta z-\zeta=z+1\\ &\Leftrightarrow z(\zeta-1)=1+\zeta\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1+\zeta}{\zeta-1}\end{aligned}$$

Pour ζ une racine de l'unité, on a $|\zeta|=1=|\zeta|^2=\zeta\overline{\zeta}$, on a donc

$$z=\frac{(1+\zeta)(\overline{\zeta}-1)}{(\zeta-1)(\overline{\zeta}-1)}=\frac{\overline{\zeta}+\zeta\overline{\zeta}-1-\zeta}{\zeta\overline{\zeta}-\overline{\zeta}-\zeta+1}=\frac{\overline{\zeta}+1-1-\zeta}{1-\overline{\zeta}-\zeta+1}=-\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{2-(\zeta+\overline{\zeta})}$$

Si $\zeta=\exp(\frac{2ik\pi}{n})$, alors $\zeta+\overline{\zeta}=2\Re\mathrm{e}(\zeta)=2\cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $\zeta-\overline{\zeta}=2i\Im\mathrm{m}(\zeta)=2i\sin(\frac{2k\pi}{n})$. On obtient

$$z=-\frac{2i\sin(2k\pi/n)}{2-2\cos(2k\pi/n)}=\frac{i\sin(2k\pi/n)}{\cos(2k\pi/n)-1},\ k\in[\![1,n-1]\!]$$

toutes les solutions de l'équation $(z+1)^n=(z-1)^n$.

Exercice 6.

1) Soient $u = x + iy$ et $v = a + ib$ deux nombres complexes. On a

$$\begin{aligned} e^u e^v &= e^x(\cos(y) + i\sin(y))e^a(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= e^x e^a(\cos(y)\cos(b) - \sin(y)\sin(b) + i(\sin(y)\cos(b) + \cos(y)\sin(b)) \\ &= e^{x+a}(\cos(y+b) + i\sin(y+b)) \\ &= e^{(x+a)+i(y+b)} \\ &= e^{x+iy+a+ib} = e^{u+v} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2) Soit $z = x + iz \in \mathbb{C}$. On a

$$|e^z| = |e^x(\cos(\theta) + i\sin(\theta))| = e^x|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = e^x(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = e^x.$$

En particulier, si $e^z = 1$, alors $e^x = 1$ et $x = 0$ car x est réel. Ensuite, on a

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(y) = 1, \\ \sin(y) = 0. \end{cases}$$

Cercle trigonométrique à l'appui, ceci est équivalent à $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Au total, on a

$$e^{x+iy} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x + iy \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

3) Soient $z, z' \in \mathcal{C}$. Par la question 1), on a $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Ainsi, e^{-z} est l'inverse de e^z. On a alors

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\Leftrightarrow e^z e^{-z'} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{z-z'} = 1 \\ &\Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

D'après la question précédente.

4) Soient $z, z' \in \mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$, on a $\Im\mathrm{m}(z - z') = \Im\mathrm{m}(z) - \Im\mathrm{m}(z') < i\pi - (-i\pi) = 2i\pi$, en particulier $z - z' \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.
La fonction $z \mapsto e^z$ est donc injective sur $\mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$ par la question précédente.
Il reste à prouver que, pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il existe $z \in R + i] - \pi, \pi[$ tel que $e^z = Z$. On pose $Z = re^{i\theta}$, l'assertion $Z \notin \mathbb{R}_-$ assure que $r > 0$ et que l'on peut choisir $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$. Le nombre $z = \ln(r) + i\theta \in \mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$ est un antécédent de Z, d'où le résultat.