Correction séance 10 (18 avril)

† *Topologie du plan*

Exercice 3.
1) Commençons par montrer qu'il faut rajouter l'hypothèse $\omega \notin U$. En effet dans le cas contraire, on peut prendre $\omega = 0$, $U = \mathbb{D}(0,2)$, $\alpha(t) = e^{i\pi t}$ et $\beta(t) = e^{-i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$. Les chemins α et β vont tous deux de 1 à -1 dans U, et on a

$$\int_\alpha \frac{dz}{z-\omega} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{i\pi t}} i\pi e^{i\pi t} dt = i\pi$$

$$\int_\beta \frac{dz}{z-\omega} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{-i\pi t}} (-i\pi) e^{-i\pi t} dt = -i\pi$$

Et ces deux intégrales ne sont pas égales. Si on essaye de remplacer U par $U \setminus 0$ pour contourner le problème, on se retrouve avec un ouvert qui n'est pas étoilé et on ne peut toujours pas appliquer le résultat !

On suppose donc $\omega \notin U$. On considère le chemin β^- allant de z_2 à z_1 et correspondant à β parcouru dans le sens inverse : si on a $\beta : [x,y] \to U$, alors $\beta^{-1} : [x,y] \to U$ est défini par

$$\beta^-(t) = \beta(y + x - t).$$

Le chemin $\alpha + \beta^-$ est un chemin allant de z_1 à lui même : c'est un chemin fermé. Comme l'ouvert U ne contient pas ω, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ est holomorphe sur U. Par le théorème de Cauchy, on a alors

$$\oint_{\alpha+\beta^-} \frac{dz}{z-\omega} = 0 = \int_\alpha \frac{dz}{z-\omega} + \int_{\beta^-} \frac{dz}{z-\omega}.$$

Pour conclure, il reste à montrer que

$$\int_{\beta^-} \frac{dz}{z-\omega} = -\int_\beta \frac{dz}{z-\omega}$$

C'est un simple calcul : on a

$$\begin{aligned}
\int_{\beta^-} \frac{dz}{z-\omega} &= \int_x^y \frac{{\beta^-}'(t)}{\beta^-(t) - \omega} dt \\
&= \int_x^y \frac{-\beta^-(x+y-t)}{\beta(x+y-t) - \omega} dt \\
&= \int_y^x \frac{\beta'(u)}{\beta(u) - \omega} du \\
&= -\int_x^y \frac{\beta'(u)}{\beta(u) - \omega} du = -\int_\beta \frac{dz}{z-\omega}
\end{aligned}$$

On a donc obtenu $\int_\alpha \frac{dz}{z-\omega} - \int_\beta \frac{dz}{z-\omega} = 0$ et le résultat suit.

2) On sait que $\gamma_{|[t_1,t_2]}$ est un chemin dans U allant de z_1 à z_2, comme α. On a alors

$$\begin{aligned}
I(\gamma,\omega) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_{|[a,t_1]}} \frac{dz}{z-\omega} + \int_{\gamma_{|[t_1,t_2]}} \frac{dz}{z-\omega} + \int_{\gamma_{|[t_2,b]}} \frac{dz}{z-\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_{|[a,t_1]}} \frac{dz}{z-\omega} + \int_{\alpha} \frac{dz}{z-\omega} + \int_{\gamma_{|[t_2,b]}} \frac{dz}{z-\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{dz}{z-\omega} \\
&= I(\widetilde{\gamma},\omega)
\end{aligned}$$

3) La première partie de η est un segment joignant $\eta(0) = -1$ et $\eta(1/2) = 2-1 = 1$. La deuxième partie est un arc de cercle (de rayon 1 et de centre 0) entre $\eta(1/2) = 1$ et $\eta(1) = e^{i\pi} = -1$. On a donc bien un chemin fermé (et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

4) On considère l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im\mathrm{m}(z) < 1/3\}$. Il s'agit d'un ouvert étoilé (par exemple en 0) et qui ne contient pas $i/2$. On considère le chemin $\gamma : [0,1/2] \to U$ donné par $\gamma(t) = e^{i\pi(2t-1)}$, qui va de -1 à 0 en passant par l'arc de cercle inférieur. Par la question précédente, on a $I(\eta, i/2) = I(\gamma + \eta_{|[1/2,1]}, i/2)$. Or par définition, $\gamma + \eta_{|[1/2,1]}$ est justement le cercle unité $C(0,1)$ parcouru dans le sens direct (de -1 à -1). On a donc bien $I(\eta, i/2) = I(C, i/2) = 1$ comme annoncé.

5) On coupe d'abord le chemin γ en 2 : d'abord $\gamma_1 := \gamma_{|[0,\pi]}$ et ensuite $\gamma_2 := \gamma_{|[\pi,2\pi]}$. Le chemin γ_1 va de a à $-a$ en restant dans $U^+ = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \Im\mathrm{m}(z) \geqslant 0\}$, là où γ_2 va de $-a$ à a en restant dans $U^- = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \Im\mathrm{m}(z) \leqslant 0\}$. Les deux ouverts U^+ et U^- sont étoilés (par exemple par rapport à i et $-i$, respectivement). On peut alors considérer les chemins $\eta_1 : [0,\pi] \to U^+$ et $\eta_2 : [\pi, 2\pi] \to U^-$, définis par $\eta_1(t) = ae^{it}$ et $\eta_2(t) = ae^{it}$. Par la question 2, on a alors

$$I(\gamma, 0) = I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1 + \eta_2, 0) = I(\eta_1 + \eta_2, 0) = I(C(0,a), 0)$$

On sait que ce dernier indice est égal à 1 (indice d'un cercle en son centre), mais on peut recalculer

$$I(C(0,a),0) = \frac{i}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ae^{it}}{ae^{it}} dt = 1$$

† *Formule de Cauchy*

Exercice 5.

1) Une paramétrisation de γ_1 est donnée par $\gamma_1(t) = R(4t-1)$ pour $t \in [0,1/2]$, et une paramétrisation de γ_2 est donnée par $\gamma_2(t) = Re^{i\pi(2t-1)}$ pour $t \in [1/2, 1]$. Comme dans l'exercice 3, le lacet γ consiste à d'abord joindre $-R$ à R par un segment, puis à décrire un demi-cercle joignant R et $-R$ dans le demi plan supérieur.

2) On décompose $1 + z^2 = (z-i)(z+i)$, et on calcule

$$\frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} = \frac{az + ai + bz - bi}{1+z^2} = \frac{(a+b)z + i(a-b)}{1+z^2}$$

Pour trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1+z^2}$, on résout donc le système linéaire

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-i}{2} \\ b = \frac{i}{2} \end{cases}$$

On a donc

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \frac{-i}{2}\oint_\gamma e^{iz}\frac{1}{z-i}dz + \frac{i}{2}\oint_\gamma e^{iz}\frac{1}{z+i}dz$$

La fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z+i}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus i$, le lacet γ est contractile dans $\mathbb{C}\setminus i$, donc la seconde intégrale est nulle. La première intégrale est donnée par la formule de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z-i}dz = 2i\pi e^{i^2} = \frac{2i\pi}{e}$$

Au total, on a donc

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \frac{-i2i\pi}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

3) Par définition, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz &= \int_{1/2}^{1} \frac{e^{iRe^{i\pi(2t-1)}}}{1+R^2e^{2i\pi(2t-1)}}2i\pi Re^{i\pi(2t-1)}dt \\ &= 2i\pi\int_0^1 \frac{e^{iRe^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Re^{i\pi t}dt\end{aligned}$$

Or, pour $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{iRe^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Re^{i\pi t}\right| &= R\frac{|e^{iRe^{i\pi t}}|}{|1+R^2e^{2i\pi t}|} \\ &= R\frac{e^{-R\sin(\pi t)}}{|1+R^2e^{2i\pi t}|} \\ &\leqslant R\frac{e^0}{1+R^2} = \frac{R}{1+R^2}\end{aligned}$$

Car $\sin(\pi t)\geqslant 0$ pour $t\in[0,1]$. En majorant violemment, on trouve alors

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| \leqslant 2\pi\int_0^1\left|\frac{e^{iRe^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Re^{i\pi t}\right|dt \leqslant \frac{2\pi R}{1+R^2}$$

Cette dernière quantité tends vers 0 quand R tends vers $+\infty$, d'où le résultat.

4) On a calculé l'intégrale le long de γ_2 dans la question précédente, calculons maintenant l'intégrale le long de γ_1. On peut donner une paramétrisation très simple de γ_1, définie par $\gamma_1(t)=t$ pour $t\in[-R,R]$, on obtient alors

$$\int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{it}}{1+t^2}dt = \int_{-R}^{R}\frac{\cos(t)}{1+t^2}dt + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin(t)}{1+t^2}dt$$

En reprenant le résultat de la question 1, on a

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-R}^{R}\frac{\cos(t)}{1+t^2}dt + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin(t)}{1+t^2}dt + \int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on a vu que la troisième intégrale converge vers 0, on obtient donc

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(t)}{1+t^2}dt + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{1+t^2}dt$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on voit que la deuxième intégrale est nulle, et on obtient finalement

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$$

Remarque : la deuxième intégrale était de toute manière nulle car $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+t^2}$ est impaire et qu'on intégrait sur $[-R, R]$.

† *Propriétés des fonctions holomorphes*

Exercice 8. Soit U l'ouvert que l'on considère, et soit Δ un triangle plein inclus dans U. On ordonne les sommets a, b, c de Δ dans le sens direct. Comme les f_n sont toutes holomorphes sur U, le théorème de Morera assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0.$$

Paramétrisons le bord de Δ en trois segments γ_1, γ_2, γ_3

$$\forall t \in [0,1], \begin{cases} \gamma_1(t) = (1-t)a + tb = t(b-a) + a \\ \gamma_2(t) = (1-t)b + tc = t(c-b) + b \\ \gamma_3(t) = (1-t)c + ta = t(a-c) + c \end{cases}$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a alors

$$0 = (b-a) \int_0^1 f_n(t(b-a)+a)dt + (c-b) \int_0^1 f_n(t(c-b)+b)dt + (a-c) \int_0^1 f_n(t(a-c)+c)dt$$

Maintenant que l'on intègre sur des segments, on peut utiliser la convergence uniforme de (f_n) pour passer à la limite et obtenir

$$0 = (b-a) \int_0^1 f(t(b-a)+a)dt + (c-b) \int_0^1 f(t(c-b)+b)dt + (a-c) \int_0^1 f(t(a-c)+c)dt$$

Ceci est égal à $\int_{\partial\Delta} f(z)dz$, qui est donc nul. Ceci est vrai pour tout trianle plein inclus dans U. Par le théorème de Morera, on obtient bien que f est holomorphe sur U.

Exercice 11.
1) Si $w \notin f(\mathbb{C})$, alors la fonction $z \mapsto f(z) - w$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$, et il s'agit naturellement d'une fonction holomorphe. On obtient donc que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) De plus, par définition, il existe un fermé de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathbb{C})$ et ne contenant pas w. Dans l'autre sens, le complémentaire de ce fermé est un ouvert contenant w et d'intersection nulle avec $f(\mathbb{C})$. Cet ouvert contient un disque $\mathbb{D}(w,r)$ avec $r > 0$. Pour $f(z) \in f(\mathbb{C})$, on a $f(z) \notin \mathbb{D}(w,r)$ par définition, et donc $|f(z) - w| \geqslant r$ et

$$\left| \frac{1}{f(z) - w} \right| \leqslant \frac{1}{r}$$

On vient donc de montrer que g est bornée par $1/r$ sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, la fonction g est alors constante. Il en va donc de même de $z \mapsto f(z) - w$ et de f, ce qui est une contradiction.

3) L'aspect dense a été démontré à la question précédente, l'aspect ouvert est un théorème du cours (théorème de l'application ouverte).