Correction séance 1 (18 janvier)

Exercice 1.
1) On a $e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc la forme algébrique de a :

$$a = e^{i\pi/3} - 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ensuite, on a $|a|^2 = (\frac{-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, donc $|a| = 1$. On a donc la forme polaire de a :

$$a = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{2i\pi/3}.$$

2) Par double distributivité, on a la forme algébrique de b

$$b = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + i^2 = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1).$$

Ensuite, on a $|b|^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8$, donc $|b| = 2\sqrt{2}$. On a donc

$$b = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Pour trouver la forme polaire de b, on doit trouver θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

À moins d'être très astucieux, cela ne se devine pas... En revanche, on peut calculer la forme polaire de b en calculant la forme polaire de $b_1 = 1 + i$ et $b_2 = \sqrt{3} + i$. On a $|b_1|^2 = 2$ et $|b_2|^2 = 4$, donc

$$b_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \text{ et } b_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}$$

On a donc la forme polaire de b :

$$b = b_1 b_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{6\pi+4\pi}{24}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

3) On a

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{(2-i)(-5i)}{(5i)(-5i)} = \frac{-10i+5i^2}{-25i^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

D'où la forme algébrique de c :

$$c = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{-1}{5} + i\frac{2}{5} - \frac{1}{5} - i\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}.$$

Pour la forme polaire, on rappelle que $-1 = e^{i\pi}$, d'où $x = \frac{2}{5}e^{i\pi}$ la forme polaire de c.

4) On peut développer $d(1+i\sqrt{3})^n$ en utilisant le binôme de Newton, mais ça donne des calculs terriblement compliqués. Plus simplement, on commence par calculer la forme polaire de $1+i\sqrt{3}$. On a $|1+i\sqrt{3}|^2 = 1+3 = 4$, donc

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

On en déduit que $d = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ est la forme polaire de d. La forme algébrique, quant à elle, est donnée par

$$d = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

5) Par définition, e est j fois la $n-1$-ème somme partielle de la série géométrique de raison $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$. On a alors

$$e = \frac{j - j^{n+1}}{1-j} = j\frac{1-j^n}{1-j}.$$

On a $j^3 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1$, donc

$$\forall n \geqslant 1,\ j^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ j & \text{si } n \equiv 1[3], \\ j^2 & \text{si } n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

On en déduit que

$$e = \begin{cases} j\frac{1-1}{1-j} = 0 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ j\frac{1-j}{1-j} = j & \text{si } n \equiv 1[3], \\ j\frac{1-j^2}{1-j} = j\frac{(1-j)(1+j)}{1-j} = j(1+j) = j + j^2 = -1 & \text{si } n \equiv 2[3]. \end{cases}$$

6) La forme algébrique de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ est donnée par

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) + \cos(\beta) + i\sin(\beta) = (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) + i(\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

Pour la forme polaire, on a

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + \overline{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}}\right) \\ &= 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\Re\mathrm{e}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

Si $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ est positif, ceci est bien la forme polaire voulue. Sinon, la forme polaire voulue est donnée par

$$2\cos\left(\pi + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi\right)}.$$

Exercice 2. Comme $z \neq i$, on a $\overline{z} \neq -i$ donc $\overline{z} + i \neq 0$. On pose $\alpha := \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$, on veut montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$. On a

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}+i} &\Leftrightarrow \alpha\overline{z} + i\alpha = i\overline{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow \overline{z}(\alpha - i) = 1 - i\alpha. \end{aligned}$$

Si $\alpha - i = 0$, alors $1 - i\alpha = 1 - i^2 = 1 + 1 = 0$, ce qui est clairement faux. On peut donc diviser par $\alpha - i$ pour obtenir.

$$\overline{z} = \frac{1 - i\alpha}{\alpha - i}.$$

On pose a présent $\alpha = a + ib$ la forme algébrique de α. On a

$$\overline{z} = \frac{1 - i(a + ib)}{(a + ib) - i} = \frac{1 - ia + b}{a + i(b - 1)}$$

Le carré du module de z (égal à $|\overline{z}|^2$) est alors donné par

$$\begin{aligned}|z|^2 &= \frac{|1 + b - ia|^2}{|a + i(b - 1)|^2}\\ &= \frac{(1 + b)^2 + a^2}{a^2 + (b - 1)^2}\\ &= \frac{1 + 2b + b^2 + a^2}{a^2 + b^2 - 2b + 1}.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}|z| = 1 &\Leftrightarrow |z|^2 = 1\\ &\Leftrightarrow 1 + 2b + b^2 + a^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1\\ &\Leftrightarrow 2b = -2b\\ &\Leftrightarrow b = 0\\ &\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 3.
1) On cherche les racines du nombre complexe $1 + i$.
Première méthode : On calcule la forme polaire de $1 + i$. On a $|1 + i|^2 = 1 + 1 = 2$, donc

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Maintenant que nous avons la forme polaire de $1 + i$, il est facile d'en extraire les racines : elles sont données par $z = \pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}$.
Deuxième méthode : Soit $z = a + ib$ une racine de $1 + i$, on a $z^2 = 1 + i = z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, et $|z|^2 = a^2 + b^2 = |1 + i| = \sqrt{2}$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 + \sqrt{2} \\ 2b^2 = \sqrt{2} - 1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

On constate que $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ sont tous deux des réels positifs, il est donc possible d'en prendre des racines réelles. L'équation $2ab = 1 > 0$ force a et b à avoir le même signe. Les deux racines de $1 + i$ sont donc données par

$$a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, b = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \text{ et } a = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

En combinant les deux méthodes, on vient de trouver une méthode pour calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$! Dans les exemples suivant, on aura tendance a utiliser la deuxième méthode, qui est juste calculatoire et évite de devoir calculer des arguments de nombres complexes.