Titre : **Théorème de Lévy et application au théorème central limite.**
Recasages : 250,261,262,266
Thème : Intégration, probabilités, transformée de Fourier.
Références : Zuily Quéffélec (p.534)

Quelques rappels d'abord, on note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées, et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et de limite nulle à l'infini (inclus dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ donc).
On dit qu'une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a.r X si, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1. *Si $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires réelles. On a équivalence entre*

(i) (X_n) converge en loi vers X.

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$.

Autrement dit, il suffit de tester la convergence des espérances sur les fonctions de limites nulles en l'infini.

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ donne immédiatement le sens $(i) \Rightarrow (ii)$. Pour la réciproque, considérons $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) = \mathbb{P}(|X| > A) < \varepsilon$, on considère alors la fonction φ valant 1 sur $[-A, A]$, nulle hors de $[-2A, 2A]$ et affine par morceaux (on a en particulier $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$). On a

$$\int_{\mathbb{R}} 1 - \varphi d\mathbb{P}_X \leqslant \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} d\mathbb{P}_X \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\begin{aligned} E[f(X_n)] - E[f(X)] &= \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_{X_n} + \left(\int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi d\mathbb{P}_X \right) - \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) d\mathbb{P}_X \\ &= A_n + B_n + C_n \end{aligned}$$

Comme $f\varphi$ est continue à support compact, on a $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$. Ensuite, $|C_n| \leqslant \|f\|_\infty \varepsilon$. Enfin, on a

$$|A_n| \leqslant \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_{X_n} \right)$$

comme $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\limsup_{n\to\infty} |A_n| \leqslant \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_x\right) \leqslant \|f\|_\infty \varepsilon$. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leqslant 2\varepsilon \|f\|_\infty$$

ce qui donne le résultat voulu. □

On passe maintenant au théorème de Lévy proprement dit.

Théorème 2. *(Lévy) Soient $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, on a équivalence entre*

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

(ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions caractéristiques des X_n converge simplement vers φ_X la fonction caractéristique de X.[1]

Comme les fonctions $x \mapsto e^{itx}$ sont continues bornées pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque, l'implication $(i) \mapsto (ii)$ est immédiate. Réciproquement, soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $f = \widehat{\varphi}$, on a $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et (par le théorème de Fubini)

$$\begin{aligned} E[f(X_n)] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dtd\mathbb{P}_{X_n}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mathbb{P}_{X_n}(x)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_{X_n}(-t)dt \end{aligned}$$

Par convergence dominée, ceci converge vers $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_X(-t)dt = E[f(X)]$. Le résultat est donc obtenu pour l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier. Cette image contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, soit donc $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. On a alors

$$|E[f(X_n)] - E[F(X)]| \leqslant |E[(f-g)(X_n)]| + |E[g(X_n)] - E[g(X)]| + |E[(f-g)(X)]|$$

Ce qui donne le résultat voulu.

Pour obtenir le théorème central limite, nous aurons besoin d'un dernier lemme élémentaire d'analyse complexe :

Lemme 3. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers $z \in \mathbb{C}$. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$$

Démonstration. La suite z_n/n tendant vers 0, on peut supposer que $1 + \frac{z_n}{n}$ ne touche pas la demi-droite $\mathbb{R}_-$, on utilise alors la détermination principale du logarithme :

$$log(z) = \int_{[1;z]} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{z-1}{t(z-1)+1} dt$$

On a alors $log(1+z) = z + o(z)$ quand z tend vers 0, d'où

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(z_n + o(z_n)\right)) \to \exp(z)$$

□

1. En réalité, le théorème affirme également un résultat plus général : si la suite des fonctions φ_{X_n} converge simplement vers une fonction ψ continue, alors celle-ci est la fonction caractéristique d'une certaine variable aléatoire

Théorème 4. *(Théorème Central Limite) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. En posant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a*

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration. On peut se ramener sans perdre de généralité au cas où $\sigma = 1$ et $\mu = 0$. On doit alors montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)$ converge vers $e^{\frac{-t^2}{2}}$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. En posant $\varphi := \varphi_{X_1}$, comme $X_1 \in {}^2(\mathbb{P})$, φ est de classe $\mathcal{C}^2$, et vérifie $\varphi'(0) = E[iX_1] = 0$ et $\varphi''(0) = E[-X_1^2] = -1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \left(E\left[e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)^n \\
&= \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

Et on conclut par notre lemme. $\square$