Titre : **Théorème de Weierstrass (par la convolution)**
Recasages : 201, 203, 209, 228, 241
Thème : Analyse réelle, intégration, convolution.
Références : Gourdon analyse (chapitre 6, problème 18, p.284)

Théorème 1. *(Weierstrass)*
Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors f est limite uniforme de polynômes sur $[a, b]$. Autrement dit, les polynômes sur $[a, b]$ sont denses dans $(\mathcal{C}([a, b]), \|.\|_\infty)$.

Démonstration. On fixe $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact. Fixons $\varepsilon > 0$, $f \in E$, et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, c'est à dire :

- χ_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)dt = 1$.
- Pour tout $\alpha > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\alpha} \chi_n(t)dt = 0$.

Étape 1 : Montrons que la suite $(f * \chi_n)$ converge uniformément vers f. Comme f est à support compact, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par ailleurs, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on ait $\int_{|t|>\delta} \chi_n(t)dt < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}
|\chi_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)f(x-t)dt - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)f(x-t)dt - f(x) \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi(t)(f(x-t) - f(x)dt \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\chi(t)||f(x-t) - f(x)|dt \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + \int_{|t|>\delta} \chi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \chi_n(t)\varepsilon dt + \int_{|t|>\delta} \chi_n(t)2\|f\|_\infty dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t)dt + 2\|f\|_\infty \varepsilon = \varepsilon(1 + 2\|f\|_\infty)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\chi_n * f - f\|_\infty < (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon$ d'où la convergence uniforme.
Étape 2 : On suppose que f est à support dans $[-1/2, 1/2]$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$ et P_n la fonction définie par

$$P_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que P_n est une approximation de l'unité On le montre au cas où, mais en situation c'est trop long : que P_n soit positive et d'intégrale 1 est clair par définition de a_n. Ensuite, pour $1 \geqslant \delta > 0$, on a

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant \int_0^1 2t(1-t^2)^n dt = -\left[\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{|t|>\delta} P_n(t)dt &= \frac{2}{a_n}\int_\delta^1 (1-t^2)^n dt \\ &\leqslant 2(n+1)\int_\delta^1 (1-t^2)^n dt \\ &\leqslant 2(n+1)(1-\delta^2)^n\end{aligned}$$

Qui tends vers 0 quand $n \to +\infty$
Montrons que $f * P_n$ est un polynôme sur $[-1/2, 1/2]$: on a

$$(f * P_n)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} P_n(x-t)f(t)dt$$

Pour $x \in [-1/2, 1/2]$, on a ainsi $|x-t| \leqslant 1$ et

$$P_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

avec $t \mapsto q_k(t)$ un polynôme. D'où

$$(f * P_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int_{-1/2}^{1/2} q_k(t)f(t)dt$$

est bien un polynôme en x sur $[-1/2, 1/2]$.
Étape 3 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on considère $c < d \in \mathbb{R}$ tels que $[a,b] \subset]c,d[$, on prolonge f par

- Une fonction affine sur $[c,a]$, valant 0 en c et $f(a)$ en a.
- Une fonction affine sur $[b,d]$, valant 0 en d et $f(b)$ en b.

On obtient ainsi une fonction continue à support dans $[c,d]$, donc dans E. Par un changement de coordonnées

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & [-1/2, 1/2] & \longrightarrow & [c,d] \\ & x & \longmapsto & (d-c)x + \frac{c+d}{2}\end{array}$$

On obtient que $f \circ \varphi^{-1}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes ψ_n par les étapes précédentes, donc f est limite uniforme de la suite de $\psi_n \circ \varphi$, qui est bien une suite de polynômes car φ est affine. $\square$