<u>Titre :</u> Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Recasages : 201,213,234,239,250
Thème : Théorie de l'intégration. Transformée de Fourier. Analyse hilbertienne
Références : Beck, Malick, Peyré - Objectif agrégation (p. 110, 140)

On se place sur $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on dit que $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction poids si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < \infty$$

Par l'algorithme de Gram Schmidt, on peut alors exhiber une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés échelonné et orthogonaux dans l'espace de Hilbert $L^2(I,\rho)$, dont le produit scalaire est donné par

$$(f,g)_\rho := \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

<u>Théorème</u> 1. *S'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < \infty$$

(i.e $e^{\alpha|x|} \in L^1(I,\rho)$) alors la famille (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Commençons par remarquer que si $x^n \in L^1(I,\rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\|x^n\|_2 = \int_I |x^n|^2\rho(x)dx = \int_I |x^{2n}|\rho(x)dx = \left\|x^{2n}\right\|_1 < \infty$$

donc les polynômes appartiennent à $L^2(I,\rho)$ et notre algorithme de Gram-Schmidt a du sens.
Pour conclure (comme $\mathrm{Vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N})$ et $\mathrm{Vect}(P_n \mid n \in \mathbb{N})$), il suffit de montrer que la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale).
En particulier, comme $1 \in L^1(I,\rho)$, la mesure de densité ρ sur I est finie, donc $L^2(I,\rho) \subset L^1(I,\rho)$.
Soit $f \in L^2(I,\rho)$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) := \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par hypothèse sur f, on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on peut donc considérer sa transformée de Fourier, donnée par

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_I f(x)\rho(x)e^{-ix\xi}dx$$

On montre que la fonction $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ensemble $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im\mathrm{m} z| < \frac{\alpha}{2}\}$ Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} g : & I \times B_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,z) & \longmapsto & f(x)\rho(x)e^{-ixz} \end{array}$$

Fixons $z = a + ib \in B_\alpha$, on a

$$|f(x)\rho(x)e^{-ixz}| = |f(x)|\rho(x)e^{xb} < |f(x)|\rho(x)e^{\alpha|x|/2}$$

Cette dernière fonction est mesurable (produit de fonctions mesurables) et même intégrable car

$$\int_I |f(x)|\rho(x)e^{\alpha|x|/2}dx = \left(|f|, e^{\alpha|x|/2}\right)_\rho$$

qui est fini comme produit scalaire de deux éléments de $L^2(I, \rho)$.
Ensuite, g est clairement holomorphe en sa seconde variable, avec $\partial_2 g(x, z) = -ixg(x, z)$. Enfin, la domination de $|g(x, z)|$ par une fonction intégrable ne dépendant pas de z, on peut appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale qui nous donne que la fonction

$$F : z \mapsto \int_I g(x, z)dx = \int_I f(x)\rho(x)e^{-ixz}dx$$

est holomorphe, avec, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_I (-ix)^n g(x, z)dx$$

Bien-sûr, la fonction F prolonge $\widehat{\varphi}$ à B_α en une fonction holomorphe.

Soit enfin $f \in \mathrm{Vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N})^\perp$, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n g(x, 0)dx = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = (-i)^n \left(f, x^n\right)_\rho = 0$$

Par unicité du prolongement analytique, on a alors $F = 0$ sur B_α, en particulier $\widehat{\varphi} = 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc $\varphi = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier. Comme ρ est supposée strictement positive, on a enfin, $f = 0$ sur I (presque partout) et donc $f = 0 \in L^2(I, \rho)$. Ainsi $\mathrm{Vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$ ce qui termine la preuve.