<u>Titre :</u> **Projection sur un convexe fermé et théorème de Riesz**
Recasages : 205,208,213,219,253
Thème : Analyse hilbertienne, analyse fonctionnelle
Références : Hirsch-Lacombe (p. 91)

<u>Théorème</u> 1. *(Projection sur un convexe fermé)*
Soient H un espace de Hilbert, et $\varnothing \neq C \subset H$ une partie convexe fermée, alors

$$\forall x \in H, \exists! y \in C \mid d(x,c) = \|x-y\|$$

on le note $P_c(x) := y$, on a de plus la caractérisation

$$y = P_c(x) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}, \Re\text{e}(y-x, y-z) \leqslant 0$$

<u>Existence :</u> On pose $d = d(x,C)$, cette distance est définie comme un inf, il existe donc une suite minimisante (y_n) de C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x-y_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n}$$

On montre que la suite (y_n) est de Cauchy. Par l'identité du parallélogramme, on a (pour $n,p \in \mathbb{N}$)

$$\frac{1}{2}(\|y_n - x\|^2 + \|y_p - x\|^2) = \left\|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2$$

Par convexité, $\frac{y_n+y_p}{2} \in C$ et on déduit de ceci que

$$d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \geqslant d^2 + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) \geqslant \|y_n - y_p\|^2$$

Donc la suite (y_n) est bien de Cauchy : elle admet une limite $y \in C$ (car celui-ci est fermé). Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\|x-y\| \leqslant \|x-y_n\| + \|y_n - y\| \leqslant \sqrt{d^2 + \frac{1}{n}} + \varepsilon$$

donc $\|x-y\| = d$: y réalise la projection.
<u>Unicité :</u> Soit y, y' réalisant la projection, par identité du parallélogramme

$$\frac{1}{2}(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2) = \left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2$$
$$\Rightarrow d^2 - \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 = \left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2$$

Comme $\frac{y+y'}{2} \in C$ par convexité, ceci n'est possible (par définition de d) que si $y = y'$.
<u>Caractérisation :</u> Soit $y = P_C(x)$ et $z \in C$, par convexité, pour $t \in [0,1]$, on a $(1-t)y + tz \in C$, et donc

$$\|x-(1-t)y - tz\|^2 = \|x - y + t(y-z)\| \geqslant d^2 = \|x-y\|^2$$
$$\Rightarrow \|x-y\|^2 + 2t\Re\text{e}(x-y|y-z) + t^2\|y-z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$$
$$= 2\Re\text{e}(x-y|y-z) + t\|y-z\|^2 \geqslant 0$$

En particulier, en laissant t tendre vers 0, on obtient

$$\Re\mathrm{e}(x-y|y-z) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Re\mathrm{e}(y-x|y-z) \leqslant 0$$

Réciproquement, pour $z \in C$, on a

$$\begin{aligned}\|z-x\|^2 &= \|(z-y)+(y-x)\|^2 \\ &= \|y-x\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\Re\mathrm{e}(y-z|y-x) \\ &\geqslant \|y-x\|^2\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $z \in C$, on a bien $\|y-x\| = \inf_{z\in C} \|z-x\|$.

On s'attarde maintenant au cas où $C = F$ est un sous-espace vectoriel fermé de H : pour $z \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $z' \mapsto z = y + \overline{\lambda} z'$ est une bijection de F dans lui-même, la caractérisation du projeté devient alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, z' \in F, \Re\mathrm{e}(\lambda(y-x, z')) \leqslant 0$$

ce qui équivaut clairement (en prenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou $i\mathbb{R}^*$) à

$$y \in F \quad \text{et} \quad y - x \in F^\perp$$

Cette caractérisation donne que l'application $x \mapsto P_F(x)$ est linéaire, et identitaire sur F, avec Ker $P_F = F^\perp$, on a la décomposition $H = F \oplus F^\perp$, que nous pouvons appliquer au théorème de Riesz :

Théorème 2. *(Représentation de Riesz)*
Soit $f \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $f = (.|y)$. On a de plus $\|f\| = \|y\|$.

Si $f = 0$, $y = 0$ convient bien-sûr. On peut donc supposer $f \neq 0$, auquel cas on a Ker $f \neq H$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a donc $H = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } f^\perp$. Comme $f \neq 0$, Ker $f^\perp$ est non trivial et de dimension 1 (supplémentaire d'un hyperplan). On choisit donc $e \in \text{Ker } f^\perp$ de norme 1 qui engendre Ker $f^\perp$ et on pose $y = \overline{f(e)}e$. Tout $x \in H$ s'écrit de manière unique $x_1 + \lambda e$ avec $x_1 \in \text{Ker } f$ et $\lambda e \in \text{Ker } f^\perp$, on a alors

$$f(x) = f(x_1) + f(\lambda e) = \lambda f(e) = (x_1 + \lambda e, \overline{f(e)}e)$$

La condition $\|f\| = \|y\|$ est alors immédiate. Pour l'unicité, soient y, y' deux candidats, on a

$$\forall x \in H, (x, y - y') = f(x) - f(x) = 0$$

donc $y - y' \in H^\perp = \{0\}$.